

О.О. Гаврилюк, О.Ю. Семчук

## Врахування крайових умов при розсіюванні лазерного випромінювання шорсткими фрактальними поверхнями

*Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка НАН України, вул. Генерала Наумова, 17, 03164 Київ, Україна,  
e-mail: gavrylyuk.oleksandr@gmail.com*

В роботі в рамках скалярної теорії Кірхгофа, розв'язано задачу розсіювання лазерного випромінювання шорсткою поверхнею для моделювання якої використовувалась двовимірна модифікація функції Вейерштрасса зі скінченим числом гармонік. На основі знайденого аналітичного розв'язку чисельно розраховано індикатриси розсіювання лазерного випромінювання фрактальними поверхнями декількох типів для різних кутів падіння і створено каталог різноманітних характерних типів розсіюючих поверхонь на основі функції Вейерштрасса а також відповідних тривимірних індикатрис розсіювання  $\ln < \rho_s >$ .

**Ключові слова:** фрактальні поверхні, функція Вейерштрасса, індикатриси розсіювання, лазерне опромінення, крайові умови.

*Стаття постуила до редакції 03.01.2018; прийнята до друку 05.03.2018.*

### Вступ

Для моделювання шорстких поверхонь в останні півтора-два десятиріччя використовуються фрактальні функції [1-6]. Застосування фракталів до моделювання рельєфу шорстких поверхонь базується на тому, що реальні поверхні в багатьох випадках не є ані суто періодичними, ані суто випадковими. Виходячи з цього, можна очікувати, що фрактальні функції, в яких періодичність та випадковість певним чином поєднуються [1], описуватимуть реальні поверхні більш адекватно, ніж використовувані раніше періодичні та випадкові функції. Незважаючи на певні успіхи у вивченні розсіювання хвиль фрактальними поверхнями в цій області зроблено не так вже й багато. Слід зауважити, що переважну більшість опублікованих розв'язків задачі розсіювання одержано в рамках наближеної теорії Кірхгофа з використанням одновимірних фрактальних функцій для моделювання розсіюючої поверхні. При цьому модельна поверхня виявляється фрактальною лише в одному напрямку, а в іншому, в залежності від способу моделювання, є або випадковою, або детермінованою (наприклад, складчаста поверхня). Крім того, опубліковані аналітичні розв'язки задачі розсіювання електромагнітних хвиль фрактальною поверхнею використовують або занадто спрощені моделі поверхні, або містять помилки і тому потребують уточнення.

### I. Функція Вейерштрасса-Мандельброта

При теоретичних дослідженнях розсіювання електромагнітних хвиль шорсткими поверхнями виникає необхідність використовувати ті чи інші математичні моделі шорсткої поверхні. До цього часу для опису рельєфу шорсткої поверхні різні автори використовували детерміністичні, випадкові та фрактальні функції. Найчастіше для математичного моделювання профілю шорсткої поверхні використовують функцію Вейерштрасса або різноманітні її модифікації, які містять нескінченну кількість гармонік і є самоподібними в як завгодно малому масштабі. Наявність нескінченної кількості гармонік обумовлює незручність цих функцій з точки зору фізичних застосувань, а одновимірність фрактальної моделі унеможливує конструювання поверхонь, які є фрактальними в усіх напрямках. Тому ми скористаємось для моделювання поверхні однією з модифікацій, що її розглядали в [1, 2] – двовимірною обмеженою смугою функцією Вейерштрасса

$$W(x, y) = c_w \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^M q^{(D-3)n} \sin \left\{ Kq^n \left[ x \cos \frac{2\pi m}{M} + y \sin \frac{2\pi m}{M} \right] + \Phi_{nm} \right\}, \quad (1)$$

де  $c_w$  – нормувальна константа;  $q > 1$  – основна просторова частота поверхні;  $K$  – фундаментальне хвильове число поверхні;  $D$  ( $2 < D < 3$ ) – фрактальна розмірність поверхні;  $N, M$  – кількість обертонів;  $\Phi_{nm}$  – довільна фаза, рівномірно розподілена в інтервалі  $[-\pi, \pi]$ .

Функція (1) є комбінацією випадкової структури та детермінованого періоду. Вона анізотропна в двох напрямках, якщо числа гармонік не дуже великі. Вона має похідні і в той же час – самоподібна. Оскільки природні поверхні не є чисто випадковими або чисто періодичними, то функція (1) може слугувати хорошим наближенням для описання природних поверхонь. Поверхня, що моделюється функцією Вейерштрасса, має багато масштабів а її шорсткість може змінюватися в залежності від масштабу, що розглядається.

## II. Розсіяння електромагнітних хвиль фрактальною поверхнею

При падінні електромагнітної хвилі на ділянку шорсткої поверхні відбувається її розсіяння – відбита хвиля розповсюджується не лише в напрямку дзеркального відбиття, а, взагалі кажучи, в різних напрямках. Інтенсивність випромінювання, розсіяного в тому чи іншому напрямку, визначається як параметрами власне поверхні (коефіцієнтом відбиття, висотою, формою і характером розташування нерівностей), так і параметрами падаючої хвилі (частота, поляризація) та

параметрами геометрії експерименту (кут падіння). Початкова хвиля падає на шорстку поверхню під кутом  $\theta_1$  і розсіюється в усіх напрямках. Розсіяна хвиля спостерігається за допомогою детектора в напрямку, що характеризується полярним  $\theta_2$  та азимутальним  $\theta_3$  кутами. Вимірюваною величиною є інтенсивність світла  $I_s$ , розсіяного в напрямку  $(\theta_2, \theta_3)$ . Нашим завданням є встановлення зв'язку між інтенсивністю світла, розсіяного фрактальною поверхнею в тому чи іншому напрямку, та параметрами поверхні і побудова індикатриси розсіяння  $I_s = I_s(\theta_2, \theta_3)$  електромагнітної хвилі шорсткою поверхнею (1).

Базова формула методу Кірхгофа дозволяє знайти розсіяне поле  $E_s(\mathbf{r}, t)$  за таких умов [7, 8]:

- падаюча хвиля є монохроматичною плоскою;
- розсіююча поверхня є шорсткою всередині деякого прямокутника  $(-X < x_0 < X, -Y < y_0 < Y)$  та гладкою поза його межами;
- розмір шорсткої ділянки набагато більший за довжину падаючої хвилі;
- всі точки поверхні мають скінчений градієнт;
- коефіцієнт відбиття однаковий для всіх точок поверхні;
- розсіяне поле спостерігається у хвильовій зоні, тобто достатньо далеко від розсіюючої поверхні.

За цих умов розсіяне поле є також монохроматичним з просторовою залежністю [7]:

$$E_s(\mathbf{r}) = -ikrF(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \frac{\exp(ikr)}{2\pi r} \int_{S_0} \exp[ik\varphi(x_0, y_0)] dx_0 dy_0 + E_e(\mathbf{r}), \quad (2)$$

де  $k$  – хвильове число падаючої хвилі,  $R$  – коефіцієнт відбиття,  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = -\frac{R}{2C}(A^2 + B^2 + C^2)$  – кутовий фактор,  $h(x_0, y_0) = c_w W(x_0, y_0)$ ,

$A = \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3$ ,  $B = -\sin \theta_2 \sin \theta_3$ ,  $C = -\cos \theta_1 - \cos \theta_2$ ,

фазова функція –  $\varphi(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + Ch(x_0, y_0)$ ,

$E_e(\mathbf{r}) = -\frac{R}{C} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} (AI_1 + BI_2)$  – крайовий доданок,

$$I_1 = \int_{-Y}^Y \left[ e^{ik\varphi(x_0, Y)} - e^{ik\varphi(x_0, -Y)} \right] dy_0, \quad (3)$$

$$I_2 = \int_{-X}^X \left[ e^{ik\varphi(x_0, Y)} - e^{ik\varphi(x_0, -Y)} \right] dx_0.$$

Якщо задати параметри розсіюючої поверхні

( $c_w$  (або  $\sigma$ ),  $D, q, K, N, M, X, Y, \Phi_{nm}$ ), параметр  $k$  (або  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ) падаючої хвилі та параметри  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

геометрії експерименту, то за формулою  $I_s = \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s^*$  (де  $\mathbf{E}_s$  – електричне поле розсіяної хвилі) можна обчислити інтенсивність розсіяної хвилі. Отже проблема знаходження інтенсивності розсіяної хвилі  $I_s$  зводиться до знаходження розсіяного поля  $\mathbf{E}_s$ . Для проведення розрахунків необхідно оперувати середньою за ансамблем поверхонь інтенсивністю  $\langle I_s \rangle = \langle \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s^* \rangle$ . Така інтенсивність виявляється

пропорційною до інтенсивності  $I_0 = \left( \frac{2kXY \cos \theta_1}{\pi r} \right)^2$

хвилі, відбитої від відповідної гладкої опорної поверхні, тому для теоретичного аналізу результатів розрахунків зручніше користуватися середнім коефіцієнтом розсіювання  $\langle \rho_s \rangle = \frac{\langle I_s \rangle}{I_0} = \frac{\langle \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* \rangle}{I_0}$

( $I_0$  – інтенсивність хвилі, відбитої від відповідної гладкої опорної поверхні). Після обчислення  $\langle I_s \rangle$  отримаємо точний вираз:

$$\langle \rho_s \rangle \approx \left[ \frac{F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\cos \theta_1} \right]^2 \left\{ \left[ 1 - (k\sigma C)^2 \right] \text{sinc}^2(kAX) \text{sinc}^2(kBY) + \frac{1}{2} c_f^2 \sum_{nm} q^{2(D-3)n} \text{sinc}^2 \left[ \left( kA + Kq^n \cos \frac{2\pi m}{M} \right) X \right] \times \right. \\ \left. \text{sinc}^2 \left[ \left( kB + Kq^n \sin \frac{2\pi m}{M} \right) Y \right] \right\} + \left[ \frac{R}{2C \cos \theta_1} (A^2 + B^2) \right]^2 \text{sinc}^2(kAX) \text{sinc}^2(kBY), \quad (4)$$

де  $c_f = kc_w C = k\sigma C \left[ \frac{2}{M} \cdot \frac{1 - q^{2(D-3)}}{1 - q^{2N(D-3)}} \right]^{\frac{1}{2}}$ .

Зауважимо, що аналогічний розв'язок задачі розсіювання було знайдено в роботах [1, 2, 9], проте наші результати мають певні відмінності від результатів цих робіт. Зокрема, вираз (4) для усередненого коефіцієнта розсіювання містить додатковий член

$$\left[ \frac{R}{2C \cos \theta_1} (A^2 + B^2) \right]^2 \text{sinc}^2(kAX) \text{sinc}^2(kBY), \quad (5)$$

який пов'язаний своїм походженням із внеском границь фрагменту розсіюючої поверхні. Цей додатковий член дає суттєвий внесок у результуючу індикури розсіювання при певній геометрії експерименту. Крім того, одержаний нами вираз (4) відрізняється від відповідного виразу з [2] чисельними значеннями коефіцієнтів перед  $(k\sigma C)^2$  та  $c_f^2$ .

### III. Результати чисельних розрахунків середнього коефіцієнта розсіювання

На основі виразу (4) нами проведено чисельні розрахунки середнього коефіцієнта розсіювання та побудовано графіки залежності  $\langle \rho_s \rangle$  від полярного  $\theta_2$  та азимутального  $\theta_3$  кутів (нормованої індикури розсіювання) для різних фрактальних поверхонь (для різних значень фрактальної розмірності  $D$ ) та кутів падіння  $\theta_1$ . Середньоквадратична висота, фундаментальне хвильове число поверхні  $K$  та розміри  $(X, Y)$  фрагменту поверхні задавалися в одиницях  $k$ , оскільки хвильове число падаючої хвилі  $k$  входить в розрахункові формули у вигляді безрозмірних

комбінацій  $k\sigma$ ,  $kX$  та  $kY$ . Ми прийняли  $R = 1$ , тобто не враховували реальну залежність коефіцієнта відбиття  $R$  від довжини падаючої хвилі  $\lambda$  та кута падіння  $\theta_1$ .

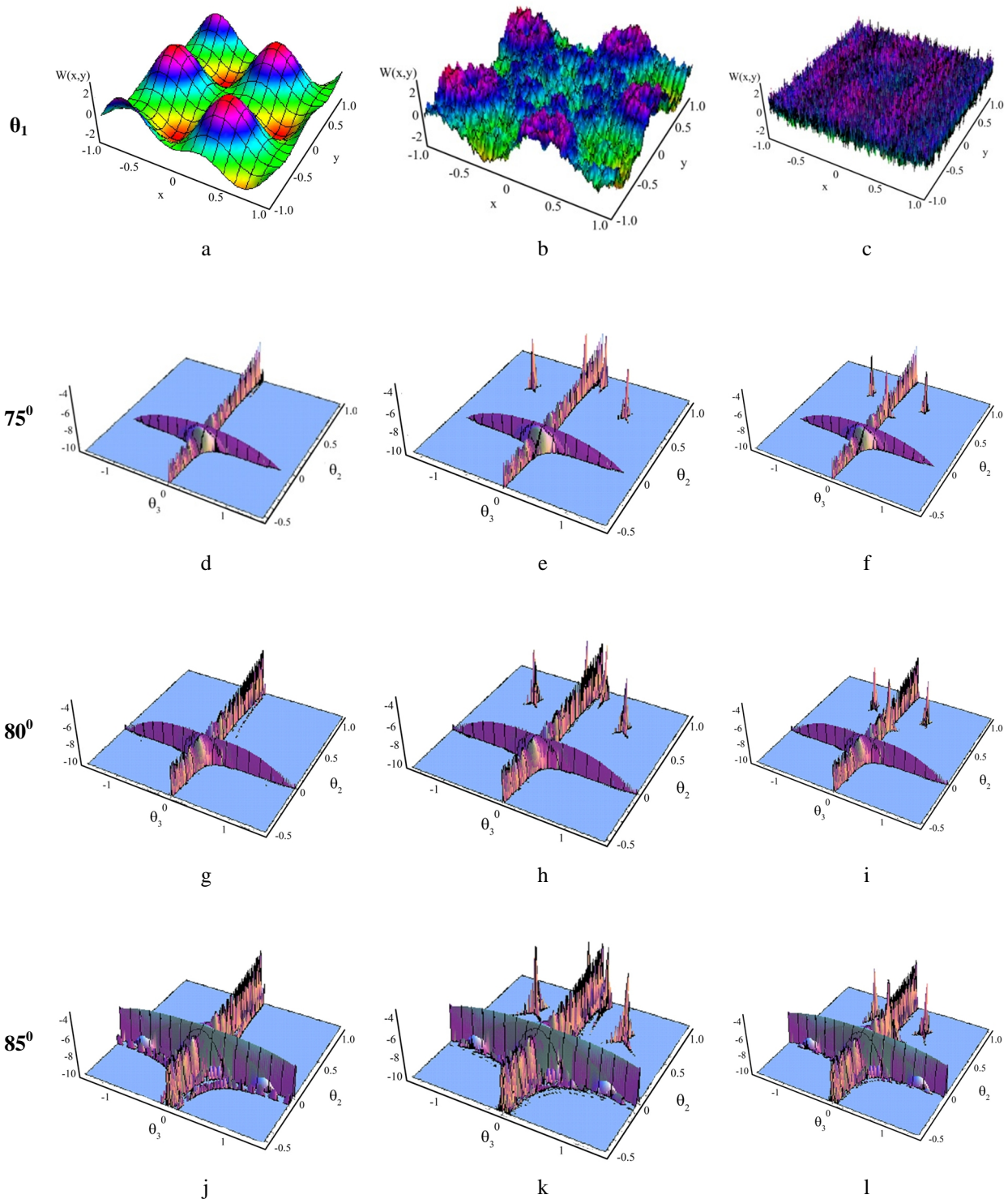
Чисельні розрахунки тривимірних індикури розсіювання проводилися за допомогою розробленої нами оригінальної програми в середовищі Mathematica 5.1 – рис. 1. На даному рисунку представлені лише індикури розсіювання з крайовими умовами для кутів  $75^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $85^\circ$  тому, що при менших кутах  $\theta_1$  не спостерігається вклад крайових умов в загальний спектр індикури розсіювання.

Вплив кожного з параметрів  $q$ ,  $K$ ,  $D$ ,  $N$ ,  $M$  на характер профілю поверхні виявляється досить складним і визначається значеннями усіх інших параметрів. Так, наприклад, при значенні  $D = 2.1$ , яке близьке до мінімального ( $D = 2$ ), збільшення величини  $q$  майже не змінює вигляд поверхні. Зі збільшенням величини  $D$  профіль поверхні стає більш чутливим до значення. Зауважимо, що зі збільшенням  $N$ ,  $M$ ,  $D$  та  $q$  збільшується і просторова однорідність поверхні у великому масштабі: великомасштабні "пагорби" зникають, а мілкомасштабні неоднорідності все більше нагадують брижі на плоскій поверхні  $\theta_1 = 75, 80, 85^\circ$  з урахуванням крайових умов для трьох різних типів фрактальних поверхонь, що характеризуються наступним набором параметрів:  $M = 3, N = 2, D = 2.01, q = 1.01$ ;  $N = 5, M = 5, D = 2.5, q = 3$ ;  $N = 10, M = 10, D = 2.99, q = 7$ , відповідно.

З аналізу рис. 1 випливає, що врахування крайових умов суттєво змінює картину розсіювання.

1. З'являються нові піки, величина та форма яких залежать від кута падіння. Зі зростанням кута падіння  $\theta$  від  $75$  до  $85^\circ$  інтенсивність піків зростає приблизно в три рази.

2. Форма піків та їх розташування не залежать від типу (фрактальної структури) розсіюючої поверхні. Тобто форма та інтенсивність піків



**Рис. 1.** Залежності індикатриси розсіяння  $\ln \langle \rho_s \rangle$  від кутів розсіяння  $\theta_2$  та  $\theta_3$  для трьох кутів падіння

$\theta_1 = 75, 80, 85^\circ$  з урахуванням крайових умов для трьох різних типів фрактальних поверхонь, що характеризуються наступним набором параметрів:  $M = 3, N = 2, D = 2,01, q = 1,01$ ;  $N = 5, M = 5, D = 2,5, q = 3$ ;  $N = 10, M = 10, D = 2,99, q = 7$ , відповідно.

однакові для кожного з трьох розглянутих типів розсіюючої поверхні.

3. Додаткові піки, що виникають в картині розсіяння, внаслідок внеску від границь фрагменту розсіюючої поверхні, розташовуються симетрично відносно основного піку.

## Висновки

Показано, що при розсіянні світла поверхнею фрактального рельєфу порушується закон дзеркального відбиття, а картина розсіяння містить

сплески інтенсивності в різних напрямках. При значеннях  $D$ , що мало відрізняються від цілочисельних, найбільша інтенсивність розсіяної хвилі спостерігається в напрямку віддзеркаленої хвилі і, окрім того, існують інші напрямки (бокові пелюстки), що утворюються внаслідок бреггівського розсіювання, в яких спостерігаються сплески інтенсивності. Врахування внеску границь фрагменту розсіюючої поверхні дещо змінює картину

розсіювання, особливо для кутів падіння  $\theta_1 > 75^\circ$ . З'являються нові піки, величина та форма яких не залежать від кута падіння.

**Гаврилюк О.О.** - к.ф.-м.н., науковий співробітник відділу Фізики і хімії поверхні наносистем;  
**Семчук О.Ю.** - д.ф.-м.н., с.н.с., завідувач відділу Фізики і хімії поверхні наносистем.

- [1] M.V. Berry, Z.V. Lewis, Proc.R.Soc. London A. 370, 459 (1980).
- [2] N. Lin, H.P. Lee, S.P. Lim, K.S. Lee, J.Mod.Opt. 42(1), 225 (1995).
- [3] A.A. Potapov, A.V.Laktiunkyn, Journal Nonlinear World. 6(1), 37 (2008).
- [4] A. Kotopoulis, G. Pouraimis, E. Kallitsis, P. Frangos, International conference knowledge-based organization. 23(3), 53 (2017).
- [5] O.B. Novikova, Computer Research and Modeling, 5(4), 583 (2013).
- [6] A. Maksimov, E. Maksimova, V. Egorov, J. Phys.: Conf. Ser. 936, 012041 (2017).
- [7] J.A. Ogirly, Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces (Adam Hilger, New York, 1991).
- [8] A. Isimaru, Propagation and scattering of waves in randomly inhomogeneous media (Mir, Moscow, 1981).
- [9] O.Yu. Semchuk, M. Willander, Behaviour of Electromagnetic Waves in Different Media and Structures (InTech, Croatia, 2011).

O.O. Havryliuk, O.Yu. Semchuk

## Consideration of Boundary Conditions in the Scattering of Laser Radiation by Rough Fractal Surfaces

*Chuiko Institute of Surface Chemistry NAS of Ukraine, General Naumov Str. 17, 03164 Kyiv, Ukraine,  
e-mail: [gavrylyuk.oleksandr@gmail.com](mailto:gavrylyuk.oleksandr@gmail.com)*

The work within the scalar theory of Kirchhoff, solved the problem of scattering of laser light rough surface for the simulation which used two-dimensional modified Weierstrass function with a finite number of harmonics. Based on the analytical solution found numerically calculated scattering indicatrix laser fractal surfaces of several types for different angles of incidence and created a catalog of various specific types of scattering surfaces based on the Weierstrass function and the corresponding three-dimensional scattering indicatrix  $\ln \langle \rho_s \rangle$ . It is shown that when scattering light by a surface of a fractal relief, the law of mirror reflection is violated, and the scattering image contains bursts of intensity in different directions.

**Key words:** fractal surfaces, Weierstrass function, scattering indicatrix, laser radiation, boundary conditions.