Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.53

Задорожна О.Ю., Скасків О.Б.

ПРО СПРЯЖЕНІ АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Про спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 152–160.

Для кратних рядів Діріхле $F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}$ встановлено зв'язки між областями збіжності G_c, абсолютної збіжності G_a та областями існування максимального члена G_μ у вигляді таких співвідношень: $\gamma G_c \subset G_a + \delta_0 e_1$, $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta_0 e_1$, де $e_1 = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^p$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ за умови $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|} > p$ та $\gamma G_c \subset G_a + \delta$; $\gamma G_\mu \subset G_a + \delta$ за умови $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty} \frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+\ldots+\ln n_p} > 1$.

Вступ.

Нехай $(\lambda_n^{(i)}), 0 \le \lambda_1^{(i)} < \lambda_2^{(i)} < ...$ $(i \in \{1, 2, \ldots, p\})$, – зростаючі до $+\infty$ послідовності невід'ємних чисел, $\lambda_0^{(i)} = 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Розглянемо кратний ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)} \exp\{(\lambda_{(n)}, s)\}, \tag{1}$$

де $(a_{(n)})$ – послідовність комплексних чисел; $(n) = (n_1, n_2, ..., n_p)$, $n_i \in \mathbb{Z}_+ \overset{def}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$, $(i \in \{1, ..., p\})$; $\|n\| = n_1 + ... + n_p; s = (s_1, s_2, ..., s_p) \in \mathbb{C}^p$; $s_j = \sigma_j + it_j$ $(j \in \{1, ..., p\})$; $(\lambda_{(n)}, s) = \lambda_{n_1}^{(1)} s_1 + ... + \lambda_{n_p}^{(p)} s_p$.

Збіжність кратних рядів Діріхле досліджувалась в [3]–[9]. А.Янушаускас [8] у випадку $p = 2$ (загальний випадок розглядається цілком подібно), зокрема довів, що якщо ряд (1) збіжний в околі точки $(\sigma_1^0 + it_1^0, ..., \sigma_p^0 + it_p^0) \in \mathbb{C}^p$, то він збіжний у прямому добуткові півплощин $\{s_j : \operatorname{Re} s_j < \sigma_j^0\}$, $j \in \{1, ..., p\}$, причому збіжність є рівномірною на кожному компакті з цього прямого добутку. Тому для кожного кратного ряду Діріхле можливі три ситуації: 1) ряд збіжний для всіх $s = (s_1 \ldots, s_p) \in \mathbb{C}^p$; 2) ряд не збігається у жодній області з $\mathbb{C}^p$; 3) ряд збіжний в області $\{(s_1, ..., s_p) : \operatorname{Re} s_k < \sigma_{ck}, k \in \{1, \ldots, p\}\}$ і кожна з областей вигляду $\{(s_1, ..., s_p) : \operatorname{Re} s_k < \sigma_k^0\}$, для якої $\sigma_i^0 > \sigma_{ci}$, $i \in I$ і $\sigma_j^0 \ge \sigma_{cj}$, $j \in J$, де $I \cup J = \{1, ..., p\}$, містить точки, у яких ряд розбіжний. Числа σ_{c1},...,σ_{cp} називаються

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.
Ключові слова і фрази: кратний ряд Діріхле, спряжені абсциси збіжності кратного ряду Діріхле.

[8] спряженими абсцисами збіжності ряду (1). Безпосередньо з означення випливає, що край області збіжності ряду задається рівнянням

$$F(\operatorname{Re} s_1, ..., \operatorname{Re} s_p) = 0.$$

У [1] досліджено абсолютну збіжність ряду (1) за умови

$$\tau_0 \overset{def}{=} \varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln \|n\|}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0, \tag{2}$$

де $\|\lambda_{(n)}\| = \lambda^{(1)}_{n_1} + ... + \lambda^{(p)}_{n_p}$. Зокрема показано, що якщо кратний ряд Діріхле абсолютно збіжний в околі точки $s^0 \in \mathbb{C}^p$, то він збіжний абсолютно в області $\{s \in \mathbb{C}^p : \ Res_j < Res^0_j\}$. Тому $\mathbb{R}^p$ ділиться на дві частини: до однієї з них належать точки $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$, які є абсцисами точок абсолютної збіжності ряду (1), а до іншої – точки $(\sigma_1, ..., \sigma_p)$, які є абсцисами точок, у яких ряд (1) не є абсолютно збіжним. Поверхня θ, що ділить $\mathbb{R}^p$ на такі множини, називається *гіперповерхнею спряжених абсцис* абсолюної збіжності ряду (1), а координати її точок $(\sigma_{a1}, ..., \sigma_{ap})$ називаються *спряженими абсцисами* абсолютної збіжності цього ряду.

В [1], крім того доведено, що за умови (2), для того, щоб точка $\sigma_a = (\sigma_{a_1}, ..., \sigma_{a_p}) \in \mathbb{R}^p$ була точкою на гіперповерхні спряжених абсцис абсолютної збіжності кратного ряду Діріхле (1), необхідно і досить, щоб

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln |a_{(n)}| + (\sigma_a, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0. \tag{3}$$

А у статті [8] за умови (2) доведено, що якщо існують числа $\rho_i \le 0, i \in \{1, ..., p\}$, такі що $\sum\limits_{i=0}^{p} \rho_i^2 > 0$,

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln \widehat{A}_{(n)}}{-(\rho, \lambda_{(n)})} = 1,$$

де $\widehat{A}_{(n)} = \sum\limits_{k_1=0}^{n_1} ... \sum\limits_{k_p=0}^{n_p} |a_{(k)}|$, то область збіжності кратного ряду Діріхле (1) збігається з областю його абсолютної збіжності.

У статті [6] отримано певне узагальнення формули Валірона для знаходження абсцис збіжності рядів Діріхле від однієї змінної, а також встановлено зв'язки абсцис збіжності з абсцисами існування максимального члена ряду Діріхле. У статті [4] результати з [6] перенесно на випадок подвійного ряду Діріхле. У даній статті встановлено $p-$вимірні $(p > 2)$ аналоги тверджень зі статей [6], [4].

1 Абсциси існування максимального члена.

Спочатку опишемо умови, за яких існує максимальний член

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma_1, ..., \sigma_p) = \max\{|a_{(n)}| \exp(\lambda_{(n)}, s) \colon (n) \in \mathbb{Z}^p_+\}$$

кратного ряду Дiрiхле (1), тобто $\mu(\sigma) < +\infty$. Позначимо через $G_\mu = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \mu(\sigma) < +\infty\}$ область iснування максимального члена. Зауважимо, що якщо $\mu(\sigma^0) < +\infty$, то $\mu(\sigma) < +\infty$ за умов $\sigma_i \le \sigma_i^0$ $(i \in \{1,\dots,p\})$. Звiдси випливає, що є три можливостi: 1) $\mu(\sigma) = +\infty$ для всiх $\sigma \in \mathbb{R}^p$; 2) $\mu(\sigma) < +\infty$ для всiх $\sigma \in \mathbb{R}^p$; 3) $\mu(\sigma) < +\infty$ для всiх $\sigma_i < \sigma_{\mu i}$ $(i \in \{1,\dots,p\})$ i $\mu(\sigma^*) = +\infty$, якщо $\sigma_i^* > \sigma_{\mu i},\ i \in I$ та $\sigma_j^* \ge \sigma_{\mu j},\ j \in J$, де $I \cup J = \{1,...,p\}$, $I \cap J = \varnothing$. Систему $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ будемо називати системою *спряжених абсцис iснування* максимального члена. Зрозумiло, що у випадку їх скiнченностi iснує функцiональна залежнiсть $F_3(\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p}) = 0$, а у випадку, коли $\mu(\sigma) < +\infty$ не для всiх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ i $\sigma_{\mu i} = +\infty,\ i \in I$, то $\sigma_{\mu j} = \mathrm{const},\ j \in J$.

Твердження 1.1. *Множина G_μ – опукла.*

Доведення. Справдi, нехай $\sigma^1, \sigma^2 \in G_\mu$, тобто $\mu(\sigma^1) < +\infty,\ \mu(\sigma^2) < +\infty$. Оскiльки $A^\theta B^{1-\theta} \le (A+B)^\theta (A+B)^{1-\theta} = A+B$ для $A \ge 0,\ B \ge 0,\ 0 \le \theta \le 1$, то

$$|a_{(n)}|\exp\{(\theta\sigma^1 + (1-\theta)\sigma^2, \lambda_{(n)})\} =$$
$$[|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^1, \lambda_{(n)})\}]^\theta [|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^2, \lambda_{(n)})\}]^{1-\theta} \le$$
$$|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^1, \lambda_{(n)})\} + |a_{(n)}|\exp\{(\sigma^2, \lambda_{(n)})\},$$

тобто $\mu(\theta\sigma^1 + (1-\theta)\sigma^2) \le \mu(\sigma^1) + \mu(\sigma^2) < +\infty$. Це означає, що разом з двома точками σ^1 i σ^2 множинi G_μ належить i весь вiдрiзок, що їх сполучає. $\square$

Твердження 1.2. *Система $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ дiйсних чисел є системою спряжених абсцис iснування максимального члена тодi i тiльки тодi, коли*

$$\varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln|a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо через A лiву частину рiвностi (4) i нехай $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ є спряженими абсцисами iснування максимального члена. Тодi

$$|a_{(n)}|\exp\{(\sigma, \lambda_{(n)})\} \le \mu(\sigma) < +\infty$$

для всiх $(n) \in \mathbb{Z}_+^p$ i для будь-яких $\sigma_i < \sigma_{\mu i}$ $(i \in \{1,\dots,p\})$. Тому

$$A \le \varlimsup_{\|n\|\to\infty} \frac{\ln\mu(\sigma) + (\sigma_\mu - \sigma)\lambda_{(n)}}{\|\lambda_{(n)}\|} \le \max\{\sigma_{\mu i} - \sigma_i : i \in \{1,\dots,p\}\},$$

i з огляду на довiльнiсть $\sigma_i < \sigma_{\mu i}$ $(i \in \{1,\dots,p\})$ отримуємо нерiвнiсть $A \le 0$.

Покажемо, що $A = 0$. Справдi, якщо $A < 0$, то для будь-якого $\eta \in (A, 0)$ i всiх досить великих $n_1 + n_2 + ... + n_p$ правильна нерiвнiсть $\ln|a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) \le \eta\|\lambda_{(n)}\|$, звiдки $|a_{(n)}|\exp\{(\sigma_\mu - \eta e_1, \lambda_{(n)})\} \le 1$, де $e_1 = (1,...,1) \in \mathbb{R}^p$. Тобто $\mu(\sigma_\mu + |\eta|e_1) < +\infty$ i система $(\sigma_{\mu 1},...,\sigma_{\mu p})$ не є системою спряжених абсцис iснування максимального члена. Необхiднiсть умови (4) доведено.

Доведемо достатнiсть умови (4). Для будь-якого $\varepsilon > 0$ i всiх досить великих $n_1 + ... + n_p$ маємо $\ln|a_{(n)}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) \le \varepsilon\|\lambda_{(n)}\|$, тобто $\mu(\sigma_\mu - \varepsilon e_1) < +\infty$ i, завдяки довiльностi $\varepsilon > 0$, отримуємо $\mu(\sigma) < +\infty$ для будь-яких $\sigma_i < \sigma_{\mu i}, i \in \{1,\dots,p\}$.

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність $\widehat{n} = (\widehat{n}_1, ..., \widehat{n}_p)$ така, що $|\widehat{n}| \to \infty$ і $\ln |a_{(\widehat{n})}| + (\sigma_\mu, \lambda_{(\widehat{n})}) \geq -(\varepsilon/2)\|\lambda_{(\widehat{n})}\|)$. Тому

$$|a_{(\widehat{n})}| \exp\{(\sigma_\mu + \varepsilon e_1, \lambda_{(\widehat{n})})\} \geq \exp\{(\varepsilon/2)\|\lambda_{(\widehat{n})}\|\} \to +\infty, \quad |\widehat{n}| \to \infty,$$

тобто $\mu(\sigma_\mu + \varepsilon e_1) = +\infty$. Завдяки довільності ε достатність умови (4) і, отже, твердження 1.2 доведено. □

Наслідок 1.1. *Система $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1}, ..., \sigma_{\mu p})$ невід'ємних чисел, принаймні одне з яких додатне, є системою спряжених абсцис існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли*

$$\varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{\ln (1/|a_{(n)}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} = 1, \tag{5}$$

а система $\sigma_\mu = (\sigma_{\mu 1}, ..., \sigma_{\mu p})$ недодатних чисел, принаймні одне з яких від'ємне, є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли

$$\varlimsup_{\|n\| \to \infty} \frac{\ln (1/|a_{(n)}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} = 1. \tag{6}$$

Доведення. Міркуємо подібно до [4]. Доведемо тільки першу частину наслідку, позаяк друга частина доводиться подібно. Припустимо, що $\min\{\sigma_{\mu i} \colon i \in \{1, \ldots, p\}\} > 0$. Останнє припущення, очевидно, не зменшує загальності міркувань. Рівність (4) можна подати у вигляді

$$\varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{\ln (1/|a_{(n)}|) - (\sigma_\mu, \lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|} = 0, \tag{7}$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ маємо $\ln (1/|a_{(n)}|) \geq (\sigma_\mu, \lambda_{(n)}) - \varepsilon \|\lambda_{(n)}\|$ і, отже,

$$\frac{\ln (1/|a_{(n)}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} \geq 1 - \frac{\varepsilon \|\lambda_{(n)}\|}{(\sigma_\mu, \lambda_{(n)})} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu i} \colon i \in \{1, \ldots, p\}\}},$$

а для деякої підпослідовності $(\widehat{n})$, такої що $|\widehat{n}| \to \infty$, подібно отримуємо

$$\frac{\ln (1/|a_{\widehat{n}}|)}{(\sigma_\mu, \lambda_{(\widehat{n})})} \leq 1 + \frac{\varepsilon |\lambda_{(\widehat{n})}|}{(\sigma_\mu, \lambda_{(\widehat{n})})} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu i} \colon i \in \{1, \ldots, p\}\}}.$$

З огляду на довільність ε ці нерівності рівносильні до рівності (5). □

Твердження 1.3. *Для того, щоб $\mu(\sigma) = \mu(\sigma_1, ..., \sigma_p) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$, необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{\|n\| \to \infty} \frac{1}{\|\lambda_{(n)}\|} \ln \frac{1}{|a_{(n)}|} = +\infty. \tag{8}$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $(\sigma_1, ..., \sigma_p) \in \mathbb{R}^p$, то для кожного $\sigma > 0$ правильна нерівність $|a_{(n)}| \exp\{\sigma \|\lambda_{(n)}\|\} \leq \mu(\sigma e_1) < +\infty$, тобто $\frac{1}{\|\lambda_{(n)}\|} \ln \frac{1}{|a_{(n)}|} \geq \sigma + o(1)$, $\|n\| \to \infty$, і з огляду на довільність σ правильна рівність (8). Навпаки, з умови (8) випливає, що для кожного $\sigma > 0$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ правильна нерівність $\frac{1}{\|\lambda_{(n)}\|} \ln \frac{1}{|a_{(n)}|} \geq \sigma$. Тому, якщо $\sigma^0 = (\sigma_1^0, ..., \sigma_p^0) \in \mathbb{R}^p$, то, вибираючи $\sigma > \max\{\sigma_i^0 : i \in \{1, \dots, p\}\}$, маємо

$$|a_{(n)}| \exp\{(\sigma^0, \lambda_{(n)})\} \leq \exp\{-(\sigma e_1 - \sigma^0, \lambda_{(n)})\} \to 0, \quad \|n\| \to \infty,$$

тобто $\mu(\sigma^0) < +\infty$. Твердження 3 доведено. □

Теорема 1. *Для того, щоб $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma_i < +\infty$ і $\sigma_j < \sigma_{\mu j} < +\infty$, де $i \in I, j \in J$ та $I \sqcup J = \{1, .2, ..., p\}$, $I \neq \varnothing$, необхідно і досить, щоб для кожного $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}$*

$$\lim_{\|n\| \to +\infty} \frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - \sum\limits_{j \in J} \sigma_j^* \lambda_{n_j}^{(j)}}{\sum\limits_{i \in I} \lambda_{n_i}^{(i)}} = +\infty. \tag{9}$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma_i < +\infty, i \in I$, і $\sigma_j < \sigma_{\mu j} < +\infty, j \in J$, то для довільних $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}$ і $\sigma_i < +\infty$ правильна нерівність

$$\frac{\ln(1/|a_{(n)}|) - \sum\limits_{j \in J} \sigma_j^* \lambda_{n_j}^{(j)}}{\sum\limits_{i \in I} \lambda_{n_i}^{(i)}} \geq \frac{-\ln\, \mu(\sigma)}{\sum\limits_{i \in I} \lambda_{n_i}^{(i)}} + \min\{\sigma_i \colon i \in I\},$$

де σ – це набір, де на i-тих місцях стоять координати $\sigma_i, i \in I$, а на j-тих – координати $\sigma_j^*, j \in J$, звідки, з огляду на довільність $\sigma_i, i \in I$, отримуємо (9).

Навпаки, з умови (9) випливає, що для довільних $\sigma_i^* < +\infty$ та $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}$ і всіх досить великих $n_1 + ... + n_p$ правильна нерівність $|a_{(n)}| \leq \exp\{-(\sum\limits_{i \in I} \sigma_i^* \lambda_{n_i}^{(i)} + \sum\limits_{j \in J} \sigma_j^* \lambda_{n_j}^{(j)})\}$, тобто для довільних $\sigma_i < \sigma_i^*, i \in I$, та $\sigma_j < \sigma_j^*, j \in J$,

$$|a_{(n)}| \exp\{\sum_{i \in I} \sigma_i \lambda_{n_i}^{(i)} + \sum_{j \in J} \sigma_j \lambda_{n_j}^{(j)}\} \leq$$

$$\exp\{-\sum_{i \in I} (\sigma_i^* - \sigma_i) \lambda_{n_i}^{(i)} - \sum_{j \in J} (\sigma_j^* - \sigma_j) \lambda_{n_j}^{(j)}\} \to 0 \quad (\|n\| \to +\infty),$$

і, отже, $\mu(\sigma) < +\infty$. З огляду на довільність $\sigma_i^* < +\infty, i \in I$, та $\sigma_j^* < \sigma_{\mu j}, j \in J$, теорему 1 доведено. □

2 Абсциси збіжності.

Нехай $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{G}_a$ – відповідно області збіжності та абсолютної збіжності ряду (1), а $G_c = \{x \in \mathbb{R}^p : \ x = Re\ z, \ z \in \mathbf{G}_c\}$, $G_a = \{x \in \mathbb{R}^p : \ x = Re\ z, \ z \in \mathbf{G}_a\}$ – їхні сліди в $\{x \in \mathbb{R}^p : x = Re\ z, \ z \in \mathbb{C}^p\}$. Через G_μ позначимо область існування максимального члена $\mu(x, F)$ ряду (1). Зрозуміло, що якщо ряд (1) збіжний у точці $(\sigma + it) = (\sigma_1 + it_1, ..., \sigma_p + it_p)$, то $|a_{(n)}| \exp\{(\sigma, \lambda_{(n)})\} \to 0, \ \|n\| \to \infty$ і, отже, $\mu(\sigma) < +\infty$. Тому $G_a \subset G_c \subset G_\mu$.

З іншого боку, для $\gamma > 0$, $\delta_0 \subset \mathbb{R}$, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо

$$h_1(\gamma; \delta_0) = \varliminf_{\|n\| \to \infty} \frac{(\gamma - 1)\ln\, |a_{(n)}| + \delta_0 \|\lambda_{(n)}\|}{\ln \|n\|},$$

$$h_2(\gamma;\delta)=\varliminf_{\|n\|\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+...+\ln n_p},$$

і доведемо таку теорему.

Теорема 2. *i). Якщо існують $\gamma>0$, $\delta_0\in\mathbb{R}$ такі, що $h_1(\gamma;\delta_0)>p$, то $\gamma G_c\subset G_a+\delta_0e_1$ і $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta_0e_1$, де $e_1=(1,...,1)\in\mathbb{R}^p$.*
ii). Якщо існують $\gamma>0$, $\delta\in\mathbb{R}^p$ такі, що $h_2(\gamma;\delta)>1$, то $\gamma G_c\subset G_a+\delta$; $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta$.

Доведення. i). Якщо довести, що $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta_0e_1$, то, оскільки $G_c\subset G_\mu$, звідси негайно отримаємо, що $\gamma G_c\subset G_a+\delta_0e_1$. Отже, нехай $(\sigma_{\mu 1},\dots,\sigma_{\mu p})\in G_\mu$. Для довільного $\varepsilon>0$ позначимо $\sigma_i^0=\gamma\sigma_{\mu i}-\delta_0-\varepsilon,\quad i\in\{1,\dots,p\}$, $\sigma^0=(\sigma_1^0,\dots,\sigma_p^0)$. Зауважимо, що для цього ж $\varepsilon>0$ з (4) отримуємо

$$\frac{\ln|a_{(n)}|+(\sigma_\mu,\lambda_{(n)})}{\|\lambda_{(n)}\|}<\varepsilon/\gamma,\quad \|n\|\ge s_0.$$

Дослідимо абсолютну збіжність ряду (1) у точці $\sigma^0=(\sigma_1^0,\dots,\sigma_p^0)$. Для будь-якого $\varepsilon_1\in(0,\ h_1(\gamma,\ \delta_0)-p)$ і для всіх $\|n\|\ge s_1\ge s_0$ послідовно отримуємо

$$|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^0,\lambda_{(n)})\}=\exp\{-\big((\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|\big)\}\times$$
$$\exp\Big\{\gamma\Big(\ln|a_{(n)}|+\big(\frac{\sigma^0+\delta_0e_1}{\gamma},\lambda_{(n)}\big)\Big)\Big\}\le$$
$$\exp\Big\{-(h_1(\gamma,\delta_0)-\varepsilon_1)\ln\|n\|+\gamma\big(\ln|a_{(n)}|+(\sigma_\mu,\lambda_{(n)})-\frac{\varepsilon}{\gamma}\|\lambda_{(n)}\|\big)\Big\}<$$
$$\exp\big\{-(h_1(\gamma,\delta_0)-\varepsilon_1)\ln\|n\|\big\}.$$

Оскільки (див. [7, с.58]) кількість цілих невід'ємних розв'язків рівняння $n_1+n_2+\cdots+n_p=s$ дорівнює C_{p+s-1}^s $(C_{p+s-1}^s\le 2s^{p-1},\ s\ge1)$, то

$$\sum_{\|n\|=s_1}^{+\infty}|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^0,\lambda_{(n)}\}=\sum_{s=s_1}^{+\infty}\sum_{\|n\|=s}|a_{(n)}|\exp\{(\sigma^0,\lambda_{(n)}\}\le$$
$$2\sum_{s=s_1}^{+\infty}\exp\{-(h_1(\gamma,\ \delta_0)-p+1-\varepsilon_1)\ln s\}<+\infty,$$

позаяк $h_1(\gamma,\delta_0)-p-\varepsilon_1>0$. Звідси випливає, що

$$G_a\supset\gamma G_\mu-(\delta_0+\varepsilon)e_1,$$

звідки, завдяки довільності $\varepsilon>0$, отримуємо потрібне вкладення.

ii). Як і у доведенні п.i) досить лише довести, що $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta$. Нехай $\sigma_\mu\in G_\mu$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\sigma_{\mu i}>-\infty$ $(i\in\{1,\dots,p\})$. Припустимо спочатку, що $\sigma_{\mu i}<+\infty$ $(i\in\{1,\dots,p\})$. Тоді з (4) для кожного $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$ отримуємо нерівність $|a_{(n)}|\le\exp\{-(\sigma_\mu-\varepsilon e_1,\lambda_n)\}$. Застосовуючи останню нерівність та означення $h_2(\gamma,\delta)$, послідовно отримуємо

$$|a_{(n)}|\exp\{(\gamma(\sigma_\mu-\varepsilon e_1)-\delta,\lambda_{(n)})\}=\Big(|a_{(n)}|\exp\{(\sigma_\mu-\varepsilon e_1,\lambda_{(n)})\}\Big)^\gamma|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le$$

$$|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le \exp\{-(h_2(\gamma;\delta)-\varepsilon)(\ln\, n_1+...+\ln\, n_p)\},$$

і, отже, ряд (1) абсолютно збіжний в точці $(\gamma(\sigma_\mu-\varepsilon e_1)-\delta)$, тобто $G_a\supset\gamma(G_\mu-\varepsilon e_1)-\delta$. З огляду на довільність $\varepsilon>0$ твердження п.ii) теореми 2 у випадку, коли $\sigma_{\mu i}<+\infty$ ($i\in\{1,\dots,p\}$), доведено.

Нехай тепер $\sigma_{\mu i}=+\infty$ ($i\in\{1,\dots,p\}$). За твердженням 1.3 правильна рівність (8), тобто $|a_{(n)}|\le\exp\{-\sigma(\|\lambda_{(n)}\|)\}$ для будь-якого $\sigma>0$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$. Звідси, як і вище, отримуємо нерівність

$$|a_{(n)}|\exp\{(\gamma\sigma e_1-\delta,\lambda_{(n)})\}\le$$

$$|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le\exp\{-(h_2(\gamma;\delta)-\varepsilon)(\ln\, n_1+...+\ln\, n_p)\},$$

звідки випливає, що $\sigma_{ai}\ge\gamma\sigma-\delta_i,\ (i\in\{1,\dots,p\}))\}$ для будь-якого $\sigma>0$, і, отже, $\sigma_{ai}=+\infty,\ (i\in\{1,..,p\})$.

Нарешті, якщо $\sigma_{\mu i}=+\infty,\ i\in I$ і $\sigma_{\mu j}<+\infty,\ j\in J$, де $I\sqcup J=\{1,...,p\},\ \ I\ne\varnothing$, то з (9) для довільних $\sigma_i^*<+\infty$ та $\sigma_j^*<\sigma_{\mu j}$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$ маємо нерівність $|a_{(n)}|\le\exp\{-(\sum\limits_{i\in I}\sigma_i^*\lambda_{n_i}^{(i)}+\sum\limits_{j\in J}\sigma_j^*\lambda_{n_j}^{(j)})\}$. Тому, як і вище, отримуємо нерівність

$$|a_{(n)}|\exp\{\sum_{i\in I}(\gamma\sigma_i^*-\delta_i)\lambda_{n_i}^{(i)}+\sum_{j\in J}(\gamma\sigma_j^*-\delta_j)\lambda_{n_j}^{(j)}\}\le$$

$$|a_{(n)}|^{1-\gamma}\exp\{-(\delta,\lambda_{(n)})\}\le\exp\{-(h_2(\gamma;\delta))-\varepsilon)(\ln\, n_1+...+\ln\, n_p)\},$$

а з неї випливає, що $\sigma_{ai}\ge\gamma\sigma_i^*-\delta_i,\ i\in I$ і $\sigma_{aj}\ge\gamma\sigma_j^*-\delta_j,\ j\in J$ для будь-яких $\sigma_i^*<+\infty$ та $\sigma_j^*<\sigma_{\mu j}$, тобто $\sigma_{ai}=+\infty,\ i\in I$ і $\sigma_{aj}\ge\gamma\sigma_{\mu j}-\delta_j,\ j\in J$. Теорему 2 повністю доведено. □

Наслідок 2.1. *Нехай $\tau=(\tau_1,...,\tau_p)$ – система додатних чисел. Якщо*

$$\varlimsup_{\|n\|\to+\infty}\frac{\ln\, n_1+...+\ln\, n_p}{(\tau,\lambda_{(n)})}\le 1, \tag{10}$$

то $G_a\supset G_c-\tau$, $G_a\supset G_\mu-\tau$.

Справді, з (10) випливає, що $\ln\, n_1+...+\ln\, n_p\le(1+\varepsilon/2)(\tau,\lambda_{(n)})$ для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх досить великих $n_1+...+n_p$. Тому

$$h_2(1;(1+\varepsilon)\tau)=\varliminf_{\|n\|\to\infty}\frac{((1+\varepsilon)\tau,\lambda_{(n)})}{\ln\, n_1+...+\ln\, n_p}\ge\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}>1,$$

і за теоремою 2 $G_a\supset G_c-(1+\varepsilon)\tau$, $G_a\supset G_\mu-(1+\varepsilon)\tau$, тобто з огляду на довільність $\varepsilon>0$ отримуємо потрібні включення.

Зауважимо, що якщо

$$\lim_{\|n\|\to\infty}\frac{\ln\, n_1+...+\ln\, n_p}{\|\lambda_{(n)}\|}=0, \tag{11}$$

то (10) виконується для будь-яких $\tau:\ \tau_i>0$ ($i\in\{1,\dots,p\}$), а за наслідком 2.1 $G_c=G_a=G_\mu$. Неважко показати, що умови (2) і (11) рівносильні, і тому звідси та з теореми 2 випливає співвідношення (3).

Зауважимо тепер, що для ряду

$$F(z)=\sum\nolimits_{\|n\|=0}^{+\infty}(-1)^{\|n\|}e^{z_1\ln(n_1+1)+\dots+z_p\ln(n_p+1)}$$

$G_c=\{\sigma\colon(\forall j)[\sigma_j\le 0]\}$, $G_a=\{\sigma\colon(\forall j)[\sigma_j\le -1]\}$. При цьому $G_c=G_a+\tau$, $\tau=(1,\dots,1)$, і (10) виконується з даним τ, тобто твердження наслідку 2.1, а разом з ним і другого пункту теореми 2, покращити, взагалі кажучи, не можна.

Те ж саме можна стверджувати і для ряду

$$F(z)=\sum\nolimits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k e^{(z_1+\dots+z_p)\ln k}.$$

Для цього ряду $a_{(n)}=0$ для всіх $(n)=(n_1,\dots,n_p)\notin\{(m_1,\dots,m_p)\colon m_1=\dots=m_p\in\mathbb{N}\}$, $G_c=\{\sigma\colon\|\sigma\|<0\}$, $G_a=\{\sigma\colon\|\sigma\|<-1]\}$, а у наслідку 2.1 можна вибрати $\tau=(1/p,\dots,1/p)$, і тому $G_c=G_a+\tau$.

Наслідок 2.2. *Для кожного ряду Діріхле вигляду (1)*

$$G_c\subset G_a+p\tau_0e_1,$$

де τ_0 *визначено в (2),* а $e_1=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^p$.

Справді, нехай в теоремі 2 $\gamma=1$ і $\delta_0=p\tau_0+\varepsilon,\ \varepsilon>0$. Тоді

$$h_1(\gamma,\ \delta_0)=\varliminf_{\|n\|\to\infty}\frac{(p\tau_0+\varepsilon)\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|}=\frac{p\tau_0+\varepsilon}{\tau_0}>p,$$

і, отже, правильні оцінки $G_a\supset G_c-(p\tau_0+\varepsilon)e_1$, тобто завдяки довільності ε маємо: $G_a\supset G_c-p\tau_0e_1$.

Література

1. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле* // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1970. – Т.5, №5. – С. 449-457.

2. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле* // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1972. – Т. 7, №2. – С. 90-103.

3. Громов В.П. *Кратные ряды Дирихле* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т.10, №3. – С. 522-536.

4. Задорожна О. Ю., Мулява О.М. *Про спряжені абсциси подвійного ряду Діріхле* // Матем. студії.– 2007. – Т.28, №1. – С. 29-35.

5. Леонтьєв А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536с.

6. Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Матем. студії. – 1998. – Т.9, №2. – С. 171-176.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.

8. Янушаускас А.И. *Двойные ряды Дирихле* // Лит. матем. сб. – 1978. – Т.13, №3. – С. 201-211.

9. Янушаускас А.И. *Свойства сопряженных абсцисс сходимости двойных рядов Дирихле* // Лит. матем. сб. – 1979. – Т.14, №1. – С. 213-228.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна.

Надійшло 22.10.2009

Zadorozhna O.Yu., Skaskiv O.B. *On the abscises of the convergence of multiple Dirichlet series*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 152–160.

For multiple Dirichlet series of the form $F(s)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)}\exp\{(\lambda_{(n)},s)\}$ we establish relations between domains of the convergence G_c, absolutely convergence G_a and of the domain of the existence of the maximal term G_μ of the series as follows: $\gamma G_c\subset G_a+\delta_0 e_1$, $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta_0 e_1$, where $e_1=(1,...,1)\in\mathbb{R}^p$, $\delta_0\in\mathbb{R}$, by condition $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|}>p$; $\gamma G_c\subset G_a+\delta$; $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta$, where $\delta\in\mathbb{R}^p$, by condition $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+...+\ln n_p}>1$.

Задорожна О.Ю., Скаскив О.Б. *О сопряженных абсциссах сходимости кратного ряда Дирихле // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 152–160.

Для кратных рядов Дирихле $F(s)=\sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_{(n)}\exp\{(\lambda_{(n)},s)\}$ установлены связи между областями сходимости G_c, абсолютной сходимости G_a и областями существования максимального члена G_μ в виде таких соотношений: $\gamma G_c\subset G_a+\delta_0 e_1$, $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta_0 e_1$, где $e_1=(1,...,1)\in\mathbb{R}^p$, $\delta_0\in\mathbb{R}$ при условии $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+\delta_0\|\lambda_{(n)}\|}{\ln\|n\|}>p$ и $\gamma G_c\subset G_a+\delta$; $\gamma G_\mu\subset G_a+\delta$ при условии $\varliminf\limits_{\|n\|\to\infty}\frac{(\gamma-1)\ln|a_{(n)}|+(\delta,\lambda_{(n)})}{\ln n_1+...+\ln n_p}>1$.