Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.98

Василишин Т.В., Загороднюк А.В.

ПОЛЯРИЗАЦІЙНА ФОРМУЛА ТА ПОЛЯРИЗАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ (P, Q)-ЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Василишин Т.В., Загороднюк А.В. *Поляризаційна формула та поляризаційна нерівність для (p, q)-лінійних відображень // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 128–144.

В роботі встановлено аналог поляризаційної формули, поляризаційної нерівності та формули Мартіна для (p, q)-лінійних відображень на нормованих просторах.

1 Вступ та основні означення

Нехай X і Y — комплексні лінійні простори. Позначимо X^n — n-тий декартовий степінь простору X. Нехай $A_n(x_1, \ldots, x_n)$ буде мультилінійним симетричним відображенням з X^n в Y, тоді $P_n(x) = A_n(\underbrace{x, \ldots, x}_{n})$ називається *n-однорідним поліномом* на X.

Відомо, що $A_n(x_1, \ldots, x_n)$ можна відновити з $P_n(x)$ за допомогою класичної *поляризаційної формули*:

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = 0}^{1} (-1)^{n-(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)} P_n(x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n), \tag{1}$$

де x' — довільний елемент з X.

Поляризаційна формула є фундаментальним результатом в теорії поліноміальних відображень, який багато разів перевідкривався і публікувався. Першим її опублікував Р. Мартін в [6], проте відомо, що її знав раніше С. Банах. Незалежно від Р. Мартіна поляризаційну формулу довели С. Мазур і В. Орліч в [7]. В літературі відомо багато різних форм поляризаційної формули. Найбільш загальний підхід до виведення класичних поляризаційних формул викладено в монографії Ш. Дініна [5]. У статті І. Сарантопулоса [9] доведено наступний варіант поляризаційної формули:

$$n! A_n(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 r_1(t) \ldots r_n(t) P_n\left(r_1(t)x_1 + \ldots + r_n(t)x_n\right) dt,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J20, 46E15.

Ключові слова і фрази: поляризаційна формула, (p, q)-лінійне відображення, поляризаційна нерівність.

де $r_i(t) = \operatorname{sign}\sin 2^i \pi t$ — *відомі функції Радемахера.* У статтях [2], [3] автори ввели так звані узагальнені функції Радемахера і використали їх для доведення різних варіантів поляризаційної формули. В роботі [4] узагальнені функції Радемахера використовуються для виведення аналога поляризаційної формули для неоднорідних поліномів та аналітичних відображень банахового простору.

У випадку, коли X, Y — нормовані простори, поляризаційна формула використовується для доведення так званої поляризаційної нерівності. Так, наприклад, в монографії Х. Мухіка [8] на основі формули

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n P_n(x' + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)$$

доведено класичну поляризаційну нерівність:

$$\|A_n\| \le \frac{n^n}{n!} \|P_n\|.$$

Відомо, що для простору ℓ_1 *поляризаційну константу* $n^n/n!$ неможливо покращити, тоді як у випадку ℓ_2 її можна замінити на одиницю [5].

Дамо означення об'єктів, вивченню яких присвячена дана робота.

Означення 1.1. *Відображення* $B_{p,q}(x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$, $B_{p,q} : X^{p+q} \to Y$, *назвемо* (p, q)*-лінійним симетричним відображенням, якщо воно має наступні властивості:*
1°. $\forall\, i \in \{1, \dots, p+q\}, \quad \forall\, x_i', x_i'' \in X$

$$B_{p,q}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i' + x_i'', x_{i+1}, \dots, x_{p+q}) = B_{p,q}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1} \dots, x_{p+q}) + \\ + B_{p,q}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1} \dots, x_{p+q});$$

2°. $\forall\, i \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

$$B_{p,q}(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \lambda B_{p,q}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_{p+q});$$

3°. $\forall\, i \in \{p+1, \dots, p+q\}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

$$B_{p,q}(x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, \lambda x_i, \dots, x_{p+q}) = \overline{\lambda} B_{p,q}(x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_i, \dots, x_{p+q});$$

4°. $\forall \sigma \in S_p$

$$B_{p,q}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}; x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = B_{p,q}(x_1, x_2, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_{p+q});$$

5°. $\forall \sigma \in S_q$

$$B_{p,q}(x_1, \dots, x_p; x_{p+\sigma(1)}, x_{p+\sigma(2)}, \dots, x_{p+\sigma(q)}) = B_{p,q}(x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}).$$

Означення 1.2. *Звуження* (p, q)*-лінійного симетричного відображення на діагональ* $P_{p,q}(x) = B_{p,q}(\underbrace{x, \dots, x}_{p}; \underbrace{x, \dots, x}_{q})$ *будемо називати* (p, q)*-поліномом.*

З означення 1.2 випливає, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ і для довільних $x, y \in X$:

1°. $P_{p,q}(\lambda x) = \lambda^p \overline{\lambda}^q P_{p,q}(x)$;

2°. $P_{p,q}(x + \lambda y) = \sum\limits_{i=0}^{p} \sum\limits_{j=0}^{q} C_p^i C_q^j \lambda^i \overline{\lambda}^j B_{p,q}(\underbrace{x, \ldots, x}_{p-i}, \underbrace{y, \ldots, y}_{i}; \underbrace{x, \ldots, x}_{q-j}, \underbrace{y, \ldots, y}_{j})$.

Зауваження 1.1. *Зауважимо, що формула (1) є правильною також для* $(0, n)$*-лінійних симетричних відображень.*

У розділі 2 даної роботи буде отримано поляризаційну формулу для (p, q)-поліномів. У розділі 3 буде розглянуто процес відновлення (p, q)-поліномів із функцій вигляду:

$$P(x) = \sum_{p=0}^{n} P_{p,n-p}(x),$$

які в [1] називаються n-однорідними $*$-поліномами. Отримана формула є аналогом відомої формули Мартіна, вперше доведеної в роботі [6] для поліномів. У розділі 4 доводиться інший варіант поляризаційної формули, у якій використано функції Радемахера і узагальнені функції Радемахера. Поляризаційна нерівність для (p, q)-поліномів на нормованих просторах доводиться у розділі 5.

2 Поляризаційна формула для (p, q)-поліномів

Теорема 1. *Нехай X і Y — комплексні лінійні простори. Нехай $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q})$ — (p, q)-лінійне симетричне відображення з X^{p+q} в Y, $P_{p,q}(x)$ — відповідний (p, q)-поліном. Тоді $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q})$ можна відновити з $P_{p,q}(x)$ за допомогою наступної формули:*

$$B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$\frac{1}{2^m p!\, q!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+q}=0}^{1} (-1)^{p+q-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{p+q})} \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_m=0}^{1} (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} \ldots r_m^{\mu_m})^q \times$$
$$P_{p,q}\big((x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p) + (r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} \ldots r_m^{\mu_m})(x'' + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q})\big),$$

де

$$r_k = \cos\frac{\pi}{2^{k-1}} + i \sin\frac{\pi}{2^{k-1}},$$
$$m = \big[\log_2(p+q)\big] + 1,$$

x', x'' — довільні елементи з X.

Доведення. Ми можемо розглянути $B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ як p-лінійне симетричне відображення з фіксованими параметрами $x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$, тобто

$$B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \equiv B_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x_1, \ldots, x_p).$$

Скориставшись поляризаційною формулою (1), дістанемо:

$$B_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x_1, \ldots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p=0}^{1} (-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)} \times P_p^{x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}}(x' + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_p x_p),$$

де $P_p^{x_{p+1},\ldots,x_{p+q}}(x)$ — це p-однорідний поліном з фіксованими параметрами $x_{p+1},\ldots,x_{p+q}$, тобто

$$P_p^{x_{p+1},\ldots,x_{p+q}}(x)=B_p^{x_{p+1},\ldots,x_{p+q}}(\underbrace{x,\ldots,x}_{p}) = B_{p,q}(\underbrace{x,\ldots,x}_{p};x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) = B_q^x(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}).$$

З іншого боку, $B_q^x(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})$ є симетричним відображенням, антилінійним по кожній змінній ($(0,q)$-лінійним симетричним відображенням), яке залежить від фіксованого параметра x. З формули (1) і зауваження 1.1 випливає, що

$$B_q^x(x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{q!}\sum_{\varepsilon_{p+1},\ldots,\varepsilon_{p+q}=0}^{1}(-1)^{q-(\varepsilon_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q})}\times$$
$$B_q^x(\underbrace{x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q},\ \ldots\ ,x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q}}_{q}).$$

Отже, $B_{p,q}(x_1,\ldots,x_p;x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) =$

$$\frac{1}{p!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p=0}^{1}(-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)}P_p^{x_{p+1},\ldots,x_{p+q}}(x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p) =$$

$$\frac{1}{p!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p=0}^{1}(-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)}\times$$
$$B_{p,q}(\underbrace{x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p,\ \ldots\ ,x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p}_{p};x_{p+1},\ldots,x_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{p!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p=0}^{1}(-1)^{p-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)}\frac{1}{q!}\sum_{\varepsilon_{p+1},\ldots,\varepsilon_{p+q}=0}^{1}(-1)^{q-(\varepsilon_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q})}\times$$

$$B_{p,q}(\underbrace{x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p,\ \ldots\ ,x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p}_{p};$$
$$\underbrace{x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q},\ \ldots\ ,x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q}}_{q}) =$$

$$\frac{1}{p!q!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=0}^{1}(-1)^{p+q-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{p+q})}\times$$
$$B_{p,q}(\underbrace{x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p,\ \ldots\ ,x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p}_{p};$$
$$\underbrace{x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q},\ \ldots\ ,x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q}}_{q}).$$

Таким чином, ми звели нашу проблему до відновлення $B_{p,q}(\underbrace{y,\ldots,y}_{p};\underbrace{z,\ldots,z}_{q})$ за функцією $P_{p,q}(x)$.

Введемо деякі технічні функції.

Означення 2.1. *Означимо функцію f з простору матриць розмірності $(p+1)\times(q+1)$ у простір Y наступним чином:*

$$f\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0q} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} C_p^i C_q^j a_{ij} B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p-i},\underbrace{y,\dots,y}_{i};\underbrace{x,\dots,x}_{q-j},\underbrace{y,\dots,y}_{j}),$$

де x, y — довільні фіксовані елементи з X, $a_{ij}\in\mathbb{C}$.

З означення випливає, що f є лінійним відображенням.

Означення 2.2. *Покладемо $M_0(x,y,\lambda) = P_{p,q}(x+\lambda y)$, $M_k(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_{k-1}(x,y,\lambda) + r_k^q M_{k-1}(x,y,r_k\lambda)\big)$, $\quad k\geq\ 1$, де $\ r_k = \cos\frac{\pi}{2^{k-1}} + i\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}$.*

Ми знаємо, що

$$P_{p,q}(x+\lambda y) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} C_p^i C_q^j \lambda^i\,\overline{\lambda}^j\, B_{p,q}(\underbrace{x,\dots,x}_{p-i},\underbrace{y,\dots,y}_{i};\underbrace{x,\dots,x}_{q-j},\underbrace{y,\dots,y}_{j}),$$

тому

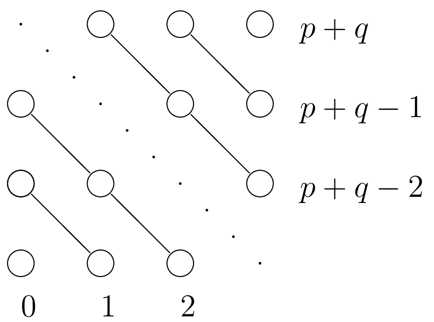
$$M_0(x,y,\lambda) = P_{p,q}(x+\lambda y) = f\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^p \\ \overline{\lambda} & \lambda\overline{\lambda} & \lambda^2\overline{\lambda} & \dots & \lambda^p\overline{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\lambda}^q & \lambda\overline{\lambda}^q & \lambda^2\overline{\lambda}^q & \dots & \lambda^p\overline{\lambda}^q \end{pmatrix}.$$

З означення $M_k(x,y,\lambda)$ і лінійності f випливає, що

$$M_k(x,y,\lambda) = f\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0q} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix},$$

тобто $M_k(x,y,\lambda)$ відповідає деякій матриці $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{p0} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0q} & a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$. Назвемо цю матрицю *матрицею відображення* $M_k(x,y,\lambda)$.

Пронумеруємо діагоналі матриці таким чином:



Діагональ, всі елементи якої дорівнюють нулю, будемо називати нульовою.

Зауваження 2.1. *У матриці відображення* $M_0(x,y,\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \dots \\ \dots & \lambda\,\overline{\lambda} & \lambda^2\,\overline{\lambda} & \lambda^3\,\overline{\lambda} & \dots \\ \vdots & \dots & \lambda^2\,\overline{\lambda}^2 & \lambda^3\,\overline{\lambda}^2 & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \vdots & \lambda^3\,\overline{\lambda}^3 & \dots \\ \overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \vdots & \dots \\ \overline{\lambda}^{q} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\,\overline{\lambda}^{q} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

на діагоналі з номером d *знаходяться елементи* $\lambda^i\,\overline{\lambda}^j$, *де*

$$i-j=const=d-q, \qquad d=0,\dots,p+q.$$

Якщо ми замінимо λ *на* $r_k\lambda$ *у* $M_0(x,y,\lambda)$, *то на діагоналі з номером* d *одержимо:*

$$(r_k\lambda)^i\,\overline{(r_k\lambda)}^j = {r_k}^i\,{\overline{r}_k}^j\lambda^i\,\overline{\lambda}^j = {r_k}^{i-j}\lambda^i\,\overline{\lambda}^j = {r_k}^{d-q}\lambda^i\,\overline{\lambda}^j.$$

Отже, степінь, в якому входить r_k *в* $M_0(x,y,r_k\lambda)$, *залежить тільки від номера діагоналі* d *і параметра* q.

Лема 2.1. *Розглянемо матрицю відображення* $M_k(x,y,\lambda)$ *для довільного натурального* k. *У такій матриці нульовими будуть діагоналі, номери яких не діляться на* 2^k *(тобто* $d \mod 2^k \neq 0$*). Елементи на інших діагоналях (*$d \mod 2^k = 0$*) дорівнюють відповідним елементам матриці відображення* $M_0(x,y,\lambda)$.

Доведення. Будемо доводити лему за індукцією по k.

Для $k=1:$
$M_1(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\big(M_0(x,y,\lambda) + r_1^q M_0(x,y,r_1\lambda)\big)$.

$$r_1^q M_0(x,y,r_1\lambda) = r_1^q f \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & (r_1\lambda)^{p-1} & (r_1\lambda)^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (r_1\lambda)^p\overline{r_1\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{r_1\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{r_1\lambda}^{q-1} & r_1\lambda\,\overline{r_1\lambda}^{q-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{r_1\lambda}^{q} & r_1\lambda\,\overline{r_1\lambda}^{q} & (r_1\lambda)^2\,\overline{r_1\lambda}^{q} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$
f\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^{q+p-1}\lambda^{p-1} & (-1)^{q+p}\lambda^{p} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^{q+p-1}\lambda^{p}\overline{\lambda} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
-\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q} & -\lambda\,\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\,\overline{\lambda}^{q} & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.
$$

$$
M_1(x,y,\lambda)=\frac{M_0(x,y,\lambda)+r_1^qM_0(x,y,r_1\lambda)}{2}=\frac{1}{2}f\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\overline{\lambda}^{q-3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q-2} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda^2\,\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\,\overline{\lambda}^{q} & \lambda^3\,\overline{\lambda}^{q} & \dots
\end{pmatrix}+
$$

$$
\frac{1}{2}f\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\overline{\lambda}^{q-3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q-2} & -\lambda\,\overline{\lambda}^{q-2} & \dots & \dots & \dots \\
-\overline{\lambda}^{q-1} & \lambda\,\overline{\lambda}^{q-1} & -\lambda^2\,\overline{\lambda}^{q-1} & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q} & -\lambda\,\overline{\lambda}^{q} & \lambda^2\,\overline{\lambda}^{q} & -\lambda^3\,\overline{\lambda}^{q} & \dots
\end{pmatrix}=
$$

$$
f\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q-2} & 0 & \dots & \dots & \dots \\
0 & \lambda\,\overline{\lambda}^{q-1} & 0 & \dots & \dots \\
\overline{\lambda}^{q} & 0 & \lambda^2\,\overline{\lambda}^{q} & 0 & \dots
\end{pmatrix}.
$$

Елементи матриці відображення $M_1(x,y,\lambda)$ на діагоналях з непарними номерами (тобто $d \mod 2 \neq 0$) дорівнюють нулю. Елементи на парних діагоналях дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$. Таким чином, базу індукції встановлено.

Нехай для матриці відображення $M_{k-1}(x,y,\lambda)$ елементи на діагоналях d таких, що $d \mod 2^{k-1} \neq 0$, дорівнюють 0, а на інших діагоналях елементи дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x,y,\lambda)$. Розглянемо $r_k^qM_{k-1}(x,y,r_k\lambda)$. Із зауваження 2.1 випливає, що на ненульових діагоналях ($d \mod 2^{k-1}=0$) маємо:

$$
r_k^q(r_k\lambda)^i\,\overline{(r_k\lambda)}^j=r_k^{i-j+q}\lambda^i\,\overline{\lambda}^j=r_k^{d-q+q}\lambda^i\,\overline{\lambda}^j=r_k^d\lambda^i\,\overline{\lambda}^j,
$$

$$
d \mod 2^{k-1}=0 \quad\Longrightarrow\quad d=2^{k-1}d',
$$

$$
r_k^d=\left(\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}+i\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)^{2^{k-1}d'}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{d'}=(-1)^{d'}.
$$

Якщо d' — парне ($d' \mod 2 = 0$), то $r_k^d = 1$ і елементи на діагоналі ті самі, що і в матриці відображення $M_{k-1}(x, y, \lambda)$. Якщо d' — непарне ($d' \mod 2 \neq 0$), то $r_k^d = -1$ і знак елементів на діагоналі міняється. Отже, знак міняється, якщо $d \mod 2^k \neq 0$, і не міняється, якщо $d \mod 2^k = 0$.

Розглянемо $M_k(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}\big(M_{k-1}(x, y, \lambda) + r_k^q M_{k-1}(x, y, r_k\lambda)\big)$. Діагоналі з номерами d, $d \mod 2^{k-1} \neq 0$, матриці відображення $M_k(x, y, \lambda)$ є нульовими (оскільки нульовими є відповідні діагоналі матриць відображень $M_{k-1}(x, y, \lambda)$ і $r_k^q M_{k-1}(x, y, r_k\lambda)$). На діагоналях d, $d \mod 2^{k-1} = 0$ і $d \mod 2^k \neq 0$, будуть нулі, оскільки ми додаємо протилежні числа $\lambda^i \overline{\lambda}^j$ і $-\lambda^i \overline{\lambda}^j$, $i - j = d$. На діагоналях d, $d \mod 2^k = 0$, елементи дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_{k-1}(x, y, \lambda)$, тобто дорівнюють відповідним елементам матриці відображення $M_0(x, y, \lambda)$. Отже, матриця відображення $M_k(x, y, \lambda)$ має нульові діагоналі з номерами d, $d \mod 2^k \neq 0$. Діагоналі d, $d \mod 2^k = 0$, такі самі, як і відповідні діагоналі матриці відображення $M_0(x, y, \lambda)$. Лему доведено. □

Продовження доведення теореми. Матриці відображень $M_k(x, y, \lambda)$ мають $p + q+1$ діагоналей. Ненульовими є діагоналі з номерами d, $d \mod 2^k = 0$. Всі інші діагоналі є нульовими. Оскільки $0 \mod 2^k = 0$, то діагональ $d = 0$ (лівий нижній елемент) є ненульовою.

Нехай $m = [\log_2(p + q)] + 1$. Тоді для кожного $d \in \{1, 2, \dots, p + q\}$, $d \mod 2^m \neq 0$, оскільки $2^m = 2^{[\log_2(p+q)]+1} > 2^{\log_2(p+q)} = p + q$. Отже, матриця відображення $M_m(x, y, \lambda)$ має лише одну ненульову діагональ з номером $d = 0$.

Із означення 2.1 маємо:

$$M_m(x, y, \lambda) = f \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\lambda}^q & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$C_p^0 C_q^0 \overline{\lambda}^q B_{p,q}(\underbrace{x, \dots, x}_{p}; \underbrace{y, \dots, y}_{q}) = \overline{\lambda}^q B_{p,q}(\underbrace{x, \dots, x}_{p}; \underbrace{y, \dots, y}_{q}).$$

Покладемо $\lambda = 1$, тоді $M_m(x, y, 1) = B_{p,q}(\underbrace{x, \dots, x}_{p}; \underbrace{y, \dots, y}_{q})$. Отже, ми визначили, що $B_{p,q}(\underbrace{x, \dots, x}_{p}; \underbrace{y, \dots, y}_{q}) = M_m(x, y, 1)$, де

$$m = [\log_2(p + q)] + 1,$$

$$M_0(x, y, \lambda) = P_{p,q}(x + \lambda y),$$

$$M_k(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}\big(M_{k-1}(x, y, \lambda) + r_k^q M_{k-1}(x, y, r_k\lambda)\big).$$

Із останньої рекурентної формули знайдемо вираз для $M_k(x, y, \lambda)$ через (p, q)-поліном.

Лема 2.2. *Для довільного натурального k виконується тотожність*

$$M_k(x,y,\lambda)=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})^q\frac{1}{2^k}\,P_{p,q}\left(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})\lambda y\right).$$

Доведення. Будемо доводити лему за індукцією. Для $k=1$:

$$M_1(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}\big(M_0(x,y,\lambda)+r_1^qM_0(x,y,r_1\lambda)\big)=$$
$$\frac{1}{2^1}\big(((r_1^0)^q)P_{p,q}(x+\lambda y)+r_1^qP_{p,q}(x+r_1\lambda y)\big)=$$
$$\sum_{\mu_1=0}^{1}(r_1^{\mu_1})^q\frac{1}{2^1}\,P_{p,q}\left(x+(r_1^{\mu_1})\lambda y\right).$$

Припустимо, що

$$M_k(x,y,\lambda)=\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})^q\frac{1}{2^k}\,P_{p,q}\left(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})\lambda y\right).$$

Тоді $M_{k+1}(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}\big(M_k(x,y,\lambda)+r_{k+1}^qM_k(x,y,r_{k+1}\lambda)\big)=$

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})^q\frac{1}{2^k}\,P_{p,q}\big(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})\lambda y\big)+$$
$$r_{k+1}^q\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})^q\frac{1}{2^k}\,P_{p,q}\big(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})r_{k+1}\lambda y\big)\Big)=$$
$$\frac{1}{2^{k+1}}\Big(\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k}r_{k+1}^0)^q\,P_{p,q}\big(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k}r_{k+1}^0)\lambda y\big)+$$
$$\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k}r_{k+1}^1)^q\,P_{p,q}\big(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k})r_{k+1}^1\lambda y\big)\Big)=$$
$$\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_{k+1}=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k}r_{k+1}^{\mu_{k+1}})^qP_{p,q}\big(x+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_k^{\mu_k}r_{k+1}^{\mu_{k+1}})\lambda y\big).$$

Лему доведено. □

Отже, поляризаційна формула матиме такий остаточний вигляд:

$$B_{p,q}(x_1,\ldots,x_p;x_{p+1},\ldots,x_{p+q})=\frac{1}{p!q!}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=0}^{1}(-1)^{p+q-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{p+q})}\times$$
$$\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=0}^{1}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_m^{\mu_m})^q\frac{1}{2^m}P_{p,q}\Big(x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_m^{\mu_m})(x''+$$
$$\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q})\Big),$$

де $m=[\log_2(p+q)]+1$. Доведення теореми завершено. □

3 Аналог формули Мартіна

Нехай $P(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} P_{p,q}(x)$, де $q = n - p$, $P_{p,q}(x)$ — довільні (p,q)-поліноми. Якщо $|\lambda| = 1$, то

$$P(\lambda x) = \sum_{p=0}^{n} P_{p,n-p}(\lambda x) = \sum_{p=0}^{n} \lambda^p \overline{\lambda}^{n-p} P_{p,n-p}(x) =$$

$$\sum_{p=0}^{n} \lambda^p \lambda^{p-n} P_{p,n-p}(x) = \lambda^{-n} \sum_{p=0}^{n} \lambda^{2p} P_{p,n-p}(x).$$

Візьмемо попарно різні числа λ_j, $j = 1, \ldots, n+1$, такі, що $|\lambda_j| = 1$ і $\lambda_j^2 \neq \lambda_k^2$ при $j \neq k$. Отримаємо систему з $n+1$ рівняння:

$$\sum_{p=0}^{n} \lambda_j^{2p} P_{p,n-p}(x) = \lambda_j^n P(\lambda_j x), \qquad j = 1, \ldots, n+1.$$

Визначник цієї системи є визначником Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 & \lambda_{n+1}^2 \\ \lambda_1^4 & \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \ldots & \lambda_n^4 & \lambda_{n+1}^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{2n} & \lambda_2^{2n} & \lambda_3^{2n} & \ldots & \lambda_n^{2n} & \lambda_{n+1}^{2n} \end{vmatrix} = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \ldots (\lambda_{n+1}^2 - \lambda_1^2) \times$$

$$(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) \ldots (\lambda_{n+1}^2 - \lambda_2^2) \ldots (\lambda_{n+1}^2 - \lambda_n^2) \neq 0.$$

З цієї системи рівнянь можемо визначити $P_{p,q}(x)$.

Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 2. *Для довільного натурального n та набору комплексних чисел λ_j, $j = 1, \ldots, n$, таких, що $|\lambda_j| = 1$, $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$ при $i \neq j$, існують числа $a_j^{p,n-p}$, $j = 1, \ldots, n+1$, $p = 0, \ldots, n$ такі, що для довільного $P(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} P_{p,n-p}(x)$ виконуються тотожності:*

$$P_{p,n-p}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^{p,n-p} P(\lambda_j x), \qquad p = 0, \ldots, n.$$

4 Виведення поляризаційної формули з використанням функцій Радемахера

Означення 4.1. ***Функціями Радемахера*** *називають функції $r_i(t)$, задані на $[0,1]$ формулою: $r_i(t) = \operatorname{sign} \sin 2^i \pi t$, $i \in \mathbb{N}$.*

Функції Радемахера мають такі властивості:
1°. $(r_i(t))^{2n} = 1$;
2°. $(r_i(t))^{2n+1} = r_i(t)$;
3°. Нехай $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$.

$$\int_0^1 (r_1(t))^{m_1} (r_2(t))^{m_2} \dots (r_n(t))^{m_n}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{якщо всі } m_1, \dots, m_n \text{ парні,} \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Означення 4.2. *Для кожного натурального $n \geq 2$ **узагальнені функції Радемахера** $S_j^{[n]}(t)$ визначаються наступним чином. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ комплексні корені степеня n з одиниці. Позначимо $I_j = \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$ і $I_{j_1 j_2}$ — відкритий j_2-підінтервал довжиною $\frac{1}{n^2}$ інтервалу I_{j_1} $(j_1, j_2 = 1, \dots, n)$. Продовжуючи таким чином, ми можемо визначити інтервал $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$ для довільного k. Функцію $S_1^{[n]}(t) : [0,1] \to \mathbb{C}$ означуємо, поклавши $S_1^{[n]}(t) = \alpha_j$ для $t \in I_j$, $1 \leq j \leq n$. В загальному $S_k^{[n]}(t) = \alpha_j$, якщо t належить підінтервалу $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$, де $j = j_k$. В точках меж інтервалів ми довизначимо $S_k^{[n]}(t)$ нулем.*

Узагальнені функції Радемахера були введені в роботах [2], [3]. Ми будемо використовувати тільки першу узагальнену функцію Радемахера $S_1^{[n]}(t)$. Ця функція має такі властивості:
1°. Оскільки $S_1^{[n]}(t)$ приймає значення на одиничному колі, то

$$\overline{S_1^{[n]}(t)} = \left(S_1^{[n]}(t)\right)^{-1};$$

2°. $$\int_0^1 \left(S_1^{[n]}(t)\right)^m dt = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \text{ ділиться на } n, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Зауваження 4.1. *Ми позначаємо*

$$B_{p,q}((x_1)^{n_1}, \dots, (x_s)^{n_s}; (x_{s+1})^{n_{s+1}}, \dots, (x_k)^{n_k}) = B_{p,q}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_s, \dots, x_s}_{n_s}; \underbrace{x_{s+1}, \dots, x_{s+1}}_{n_{s+1}}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k}).$$

Якщо деяке $n_j = 0$, то це означає, що x_j не входить до списку аргументів у даній позиції.

Зауваження 4.2. *Нехай $c_1, \dots, c_{p+q} \in \mathbb{C}$. Тоді*

$$P_{p,q}(c_1 x_1 + \dots + c_{p+q} x_{p+q}) = B_{p,q}\left((c_1 x_1 + \dots + c_{p+q} x_{p+q})^{p+q}\right) = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_{p+q} \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p+q} = p}} \frac{p!}{k_1! \dots k_{p+q}!} \sum_{\substack{l_1 \geq 0, \dots, l_{p+q} \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_{p+q} = q}} \frac{q!}{l_1! \dots l_{p+q}!} \times$$

$$B_{p,q}\left((c_1 x_1)^{k_1}, \dots, (c_{p+q} x_{p+q})^{k_{p+q}}; (c_1 x_1)^{l_1}, \dots, (c_{p+q} x_{p+q})^{l_{p+q}}\right) =$$

$$\sum_{\substack{k_1 \geq 0, \dots, k_{p+q} \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p+q} = p}} c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_{p+q}^{k_{p+q}} \frac{p!}{k_1! \dots k_{p+q}!} \sum_{\substack{l_1 \geq 0, \dots, l_{p+q} \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_{p+q} = q}} \overline{c_1^{l_1} c_2^{l_2} \dots c_{p+q}^{l_{p+q}}} \cdot \frac{q!}{l_1! \dots l_{p+q}!} \times$$

$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1}, \dots, (x_{p+q})^{k_{p+q}}; (x_1)^{l_1}, \dots, (x_{p+q})^{l_{p+q}}\right).$$

Доведення цієї формули аналогічне до доведення поліноміальної теореми з комбінаторики.

Теорема 3. *Нехай* $B_{p,q}(x_1,\ldots,x_{p+q})$ *— (p,q)-лінійне симетричне відображення,* $P_{p,q}(x)$ *— відповідний (p,q)- поліном. Тоді*

$$B_{p,q}(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\int_0^1\int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p} r_1(\theta)r_2(\theta)\ldots r_{p+q}(\theta)\times$$
$$P_{p,q}\Big(S_1^{[2q+1]}(t)\,(r_1(\theta)x_1+\ldots+r_p(\theta)x_p)+(r_{p+1}(\theta)x_{p+1}+\ldots+r_{p+q}(\theta)x_{p+q})\Big)\,dt\,d\theta. \quad (2)$$

Доведення. Позначимо праву частину формули (2) через A.
Із зауваження 4.2 випливає, що

$$A = \frac{1}{p!q!}\int_0^1\int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p} r_1(\theta)r_2(\theta)\ldots r_{p+q}(\theta)\times$$
$$P_{p,q}\Big(S_1^{[2q+1]}(t)\,(r_1(\theta)x_1+\ldots+r_p(\theta)x_p)+\,(r_{p+1}(\theta)x_{p+1}+\ldots+r_{p+q}(\theta)x_{p+q})\Big)\,dt\,d\theta=$$
$$\sum_{\substack{k_1\ge0,\ldots,k_{p+q}\ge0\\ k_1+\ldots+k_{p+q}=p}}\frac{1}{k_1!\ldots k_{p+q}!}\times\sum_{\substack{l_1\ge0,\ldots,l_{p+q}\ge0\\ l_1+\ldots+l_{p+q}=q}}\frac{1}{l_1!\ldots l_{p+q}!}\times$$
$$\int_0^1\int_0^1\left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p} r_1(\theta)r_2(\theta)\ldots r_{p+q}(\theta)\times\left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{k_1+\ldots+k_p}\left(\overline{S_1^{[2q+1]}(t)}\right)^{l_1+\ldots+l_p}\times$$
$$(r_1(\theta))^{k_1+l_1}(r_2(\theta))^{k_2+l_2}\ldots(r_{p+q}(\theta))^{k_{p+q}+l_{p+q}}\times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1},\ldots,(x_{p+q})^{k_{p+q}};(x_1)^{l_1},\ldots,(x_{p+q})^{l_{p+q}}\right)\,dt\,d\theta=$$

$$\sum_{\substack{k_1\ge0,\ldots,k_{p+q}\ge0\\ k_1+\ldots+k_{p+q}=p}}\frac{1}{k_1!\ldots k_{p+q}!}\times\sum_{\substack{l_1\ge0,\ldots,l_{p+q}\ge0\\ l_1+\ldots+l_{p+q}=q}}\frac{1}{l_1!\ldots l_{p+q}!}\times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1},\ldots,(x_{p+q})^{k_{p+q}};(x_1)^{l_1},\ldots,(x_{p+q})^{l_{p+q}}\right)\times$$
$$\int_0^1\left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p+k_1+\ldots+k_p-l_1-\ldots-l_p}\,dt\times$$
$$\int_0^1(r_1(\theta))^{1+k_1+l_1}(r_2(\theta))^{1+k_2+l_2}\ldots(r_{p+q}(\theta))^{1+k_{p+q}+l_{p+q}}\,d\theta.$$

Розглянемо другий інтеграл

$$\int_0^1(r_1(\theta))^{1+k_1+l_1}(r_2(\theta))^{1+k_2+l_2}\ldots(r_{p+q}(\theta))^{1+k_{p+q}+l_{p+q}}\,d\theta.$$

Якщо для деякого i $\;k_i+l_i=0$, то в підінтегральному виразі буде множник $(r_i(\theta))^1$, тому за властивістю 3° функцій Радемахера інтеграл дорівнює 0. Тому для ненульових доданків $k_i + l_i \geq 1, \quad i = 1, \ldots, p+q$. Звідси $\sum_{i=1}^{p+q}(k_i + l_i) \geq p+q$, і рівність досягається лише, коли $k_i + l_i = 1, \quad i = 1, \ldots, p+q$. Але ми знаємо, що $k_1 + \ldots + k_{p+q} = p$ і $l_1 + \ldots + l_{p+q} = q$, тому $\sum_{i=1}^{p+q}(k_i + l_i) = p+q$. Отже, для ненульових доданків $k_i + l_i = 1, \quad i = 1, \ldots, p+q$ і

$$\int_0^1 (r_1(\theta))^{1+k_1+l_1}(r_2(\theta))^{1+k_2+l_2} \ldots (r_{p+q}(\theta))^{1+k_{p+q}+l_{p+q}}\, d\theta = \int_0^1 (r_1(\theta))^2 (r_2(\theta))^2 \ldots (r_{p+q}(\theta))^2\, d\theta = 1.$$

Запишемо суму, відкинувши нульові доданки, і врахуємо, що $l_i = 1 - k_i, \quad i = 1, \ldots, p+q$.

$$A = \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq k_{p+q} \leq 1 \\ k_1 + \ldots + k_{p+q} = p}} \frac{1}{k_1! \ldots k_{p+q}!} \times \frac{1}{(1-k_1)! \ldots (1-k_{p+q})!} \times$$
$$B_{p,q}\left((x_1)^{k_1}, \ldots, (x_{p+q})^{k_{p+q}}; (x_1)^{1-k_1}, \ldots, (x_{p+q})^{1-k_{p+q}}\right) \times$$
$$\int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1-p+k_1+\ldots+k_p-(1-k_1)-\ldots-(1-k_p)} dt.$$

Знайдемо значення k_i, при яких інтеграл не дорівнює нулю.

$$2q + 1 - p + k_1 + \ldots + k_p - (1 - k_1) - \ldots - (1 - k_p) = 2q + 1 - p + k_1 + \ldots + k_p - p + k_1 + \ldots + k_p = 2q + 1 - 2(p - k_1 - \ldots - k_p) = 2q + 1 - 2(k_{p+1} + \ldots + k_{p+q}).$$

$0 \leq k_i \leq 1$, тому

$$1 = 2q + 1 - 2q \leq 2q + 1 - 2(k_{p+1} + \ldots + k_{p+q}) \leq 2q + 1. \tag{3}$$

За властивістю 3° узагальнених функцій Радемахера інтеграл не дорівнює нулю тільки тоді, коли $2q + 1 - 2(k_{p+1} + \ldots + k_{p+q})$ ділиться на $2q + 1$. Із нерівностей (3) випливає, що це буде тоді, коли $2q + 1 - 2(k_{p+1} + \ldots + k_{p+q}) = 2q + 1$, тобто $k_{p+1} = \ldots = k_{p+q} = 0$. Звідси $p = k_1 + \ldots + k_p + k_{p+1} + \ldots + k_{p+q} = k_1 + \ldots + k_p$, отже, $k_1 = \ldots = k_p = 1$.

Тому остаточно сума запишеться у вигляді:

$$A = B_{p,q}\Big((x_1)^1, \ldots, (x_p)^1, (x_{p+1})^0, \ldots, (x_{p+q})^0; (x_1)^0, \ldots, (x_p)^0, (x_{p+1})^1, \ldots, (x_{p+q})^1\Big) \times$$
$$\int_0^1 \left(S_1^{[2q+1]}(t)\right)^{2q+1} dt = B_{p,q}(x_1, \ldots, x_p; x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}).$$

$\square$

5 Поляризаційна нерівність

Повернемося до Теореми 1. Якщо ми використаємо у доведенні теореми замість формули (1) поляризаційну формулу

$$A_n(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_nP_n(x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_nx_n),$$

то, проводячи аналогічні міркування, знайдемо наступну формулу:

$$\begin{gathered}B_{p,q}(x_1,\ldots,x_p;x_{p+1},\ldots,x_{p+q})=\\ \frac{1}{p!q!2^{p+q}}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=\pm1}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p+q}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=0}^{1}\frac{1}{2^m}(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_m^{\mu_m})^q\times\\ P_{p,q}\big((x'+\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p)+(r_1^{\mu_1}r_2^{\mu_2}\ldots r_m^{\mu_m})(x''+\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q})\big).\end{gathered}\tag{4}$$

Нехай X і Y є нормованими просторами. Визначимо норми (p,q)-поліномів і (p,q)-лінійних симетричних відображень:

$$\|P_{p,q}\|=\sup\{\|P_{p,q}(x)\|:\ x\in B\}$$

і

$$\|B_{p,q}\|=\sup\{\|B_{p,q}(x_1,\ldots,x_{p+q})\|:\ x_1,\ldots,x_{p+q}\in B\},$$

де B — замкнута одинична куля в X.

Наступний наслідок узагальнює відому поляризаційну нерівність (див., напр. [8]) для (p,q)-поліномів.

Наслідок 5.1. *Має місце наступна нерівність для норми (p,q)-лінійної симетричної форми і відповідного їй (p,q)-полінома:*

$$\|B_{p,q}\|\le\frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}\|P_{p,q}\|.$$

Доведення. Нехай $x_1,\ldots,x_{p+q}\in B$. Використаємо формулу (4) і підставимо $x'=x''=0$:

$$\begin{gathered}\|B_{p,q}(x_1,\ldots,x_{p+q})\|=\\ \Big\|\frac{1}{p!q!2^{p+q}}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{p+q}=\pm1}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{p+q}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m=0}^{1}\frac{1}{2^m}(r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})^q\times\\ P_{p,q}\Big((\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p)+(r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})(\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q})\Big)\Big\|\le\\ \frac{2^{p+q}}{p!q!2^{p+q}}\times\frac{2^m}{2^m}\times\\ \Big\|P_{p,q}\Big((\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p)+(r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})(\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q})\Big)\Big\|=\\ \frac{1}{p!q!}\times\Big\|P_{p,q}\Big((p+q)\times\frac{(\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_px_p)+(r_1^{\mu_1}\ldots r_m^{\mu_m})(\varepsilon_{p+1}x_{p+1}+\ldots+\varepsilon_{p+q}x_{p+q})}{p+q}\Big)\Big\|\le\\ \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}\Big\|P_{p,q}\Big\|.\end{gathered}$$

□

Наступний приклад показує, що у загальному випадку цю оцінку не можна покращити.

Приклад 5.1. *Нехай $X = \ell_1$ — простір всіх послідовностей комплексних чисел $x = (x_n)$ таких, що $\|x\| = \sum |x_n| < \infty$. Для $p > 0$, $q > 0$ візьмемо відображення $B : X^{p+q} \to \mathbb{C}$,*

$$B(x^1, \ldots, x^p; x^{p+1}, \ldots, x^{p+q}) = x_1^1 x_2^2 \ldots x_p^p \, \overline{x_{p+1}^{p+1}} \ldots \overline{x_{p+q}^{p+q}}.$$

Проведемо симетризацію $B(x^1, \ldots, x^{p+q})$ спочатку по перших p, а потім по наступних q змінних:

$$B_s(x^1, \ldots, x^p; x^{p+1}, \ldots, x^{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma_1 \in S_p} x_1^{\sigma_1(1)} \ldots x_p^{\sigma_1(p)} \sum_{\sigma_2 \in S_q} \overline{x_{p+1}^{p+\sigma_2(1)} \ldots x_{p+q}^{p+\sigma_2(q)}}.$$

Очевидно, що $B_s(x^1, \ldots, x^p; x^{p+1}, \ldots, x^{p+q})$ є (p, q)-лінійним симетричним відображенням. Бачимо, що

$$\|B_s(x^1, \ldots, x^p; x^{p+1}, \ldots, x^{p+q})\| \leq \\ \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma_1 \in S_p} |x_1^{\sigma_1(1)}| \ldots |x_p^{\sigma_1(p)}| \sum_{\sigma_2 \in S_q} |x_{p+1}^{p+\sigma_2(1)}| \ldots |x_{p+q}^{p+\sigma_2(q)}| \leq \frac{1}{p!q!} \|x^1\| \ldots \|x^{p+q}\|.$$

Отже, $\|B_s\| \leq \frac{1}{p!q!}$. З іншого боку,

$$B_s(e^1, \ldots, e^{p+q}) = \frac{1}{p!q!},$$

де

$$e^i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots).$$

Звідси робимо висновок, що $\|B_s\| = 1/p!q!$.

Позначимо $\widehat{B}_s(x) = B_s(x, \ldots, x)$. $\widehat{B}_s$ — це (p, q)-поліном, що відповідає B_s.

$$\widehat{B}_s(x) = x_1 \ldots x_p \overline{x_{p+1}} \ldots \overline{x_{p+q}},$$

де $x = (x_1, \ldots, x_{p+q}, \ldots)$. Оскільки середнє геометричне невід'ємних чисел завжди менше або дорівнює їх середньому арифметичному, то

$$\|\widehat{B}_s(x)\| = |x_1| \ldots |\overline{x_{p+q}}| \leq \frac{1}{(p+q)^{p+q}} (|x_1| + \ldots + |x_{p+q}|)^{p+q}.$$

Отже, $\|\widehat{B}_s\| \leq \frac{1}{(p+q)^{p+q}}$. Візьмемо $x = \Big(\underbrace{\frac{1}{p+q}, \ldots, \frac{1}{p+q}}_{p+q}, 0, \ldots\Big)$. Тоді

$$\|\widehat{B}_s(x)\| = \frac{1}{(p+q)^{p+q}}.$$

Звідси маємо, що $\|\widehat{B}_s\| = \frac{1}{(p+q)^{p+q}}$, і, отже,

$$\|B_s\| = \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!} \|\widehat{B}_s\|.$$

Наведемо приклад (p,q)-лінійного симетричного відображення з простору ℓ_2, який показує, що в цьому випадку, на відміну від класичної поляризаційної нерівності у гільбертовому просторі, $\|B_{p,q}\| \neq \|P_{p,q}\|$.

Приклад 5.2. *Нехай* $X = \ell_2$, $p > 1$, $q > 1$, $B_{p,q} : X^{p+q} \to \mathbb{C}$,

$$B_{p,q}(x^1, \ldots, x^p; x^{p+1}, \ldots, x^{p+q}) = x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^p \overline{x_2^{p+1} \ldots x_2^{p+q}}.$$

$B_{p,q}$ *є* (p,q)*-лінійним симетричним відображенням.*

$$\|B_{p,q}(x^1, \ldots, x^{p+q})\| = |x_1^1||x_1^2| \ldots |x_1^p||\overline{x_2^{p+1}}| \ldots |\overline{x_2^{p+q}}| =$$

$$\sqrt{|x_1^1|^2}\sqrt{|x_1^2|^2} \ldots \sqrt{|x_1^p|^2}\sqrt{|x_2^{p+1}|^2} \ldots \sqrt{|x_2^{p+q}|^2} \leq \|x^1\|\|x^2\| \ldots \|x^{p+q}\|,$$

$\|B_{p,q}\| \leq 1$, $B_{p,q}(e^1, \ldots, e^1; e^2, \ldots, e^2) = 1$. *Отже,* $\|B_{p,q}\| = 1$. *З іншого боку* $\widehat{B}_{p,q}(x) = (x_1)^p (\overline{x_2})^q$ *є* (p,q)*-поліномом і*

$$\|\widehat{B}_{p,q}(x)\| = |x_1|^p |\overline{x_2}|^q = |x_1|^p |x_2|^q.$$

Тому

$$\|\widehat{B}_{p,q}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\widehat{B}_{p,q}(x)\| = \sup_{|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1} |x_1|^p |x_2|^q = \max_{0 \leq t \leq 1} t^p \left(\sqrt{1-t^2}\right)^q.$$

Легко перевірити, що максимум функції

$$f(t) = t^p \left(\sqrt{1-t^2}\right)^q$$

досягається при

$$t = \sqrt{\frac{p}{p+q}} \in [0,1],$$

і

$$f\left(\sqrt{\frac{p}{p+q}}\right) = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{p}{p+q}}\right)^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{q}{p+q}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

Отже,

$$\|\widehat{B}_{p,q}\| = \frac{p^{p/2} q^{q/2}}{(p+q)^{\frac{p+q}{2}}}$$

і

$$\|B_{p,q}\| = \frac{(p+q)^{\frac{p+q}{2}}}{p^{p/2} q^{q/2}} \|\widehat{B}_{p,q}\|.$$

Література

1. Митрофанов М.А. *Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах* // Математические заметки. – 2009. – Т.86, Вип.4. – С. 557-570.

2. Aron R.M. and Globevnic J. *Analytic functions on* c_0, Revista Matematica, Madrid, **2** (1989), 27-34.

3. Aron R.M., Lacruz M., Ryan R.A., Tonge A.M. *The generalized Rademacher functions*, Note Math., **12** (1992), 15-22.

4. Chernega I. Zagorodnyuk A. *Generalization of the polarization formula for nonhomogeneous polynomials and analytic mappings on Banach spaces*, Topology (2009), to appear.

5. Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.

6. Martin R.S. *Contribution to the theory of functionals*, Ph.D. thesis, University of California, 1932.

7. Mazur S., Orlicz W. *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II*, Studia Math., **5** (1935), 50-68, 179-189.

8. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.

9. Sarantopoulos I. *Estimates for polynomial norms on $L^p(\mu)$ spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **99**, 2 (1986), 263-271.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 2.09.2009

Vasylyshyn T.V., Zagorodnyuk A.V. *Polarization formula and polarization inequality for (p, q)-linear maps*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 128–144.

It is proved an analogues of polarization formula and polarization inequality and Martin's formula for (p, q)-linear maps on normed spaces.

Василишин Т.В., Загороднюк А.В. *Поляризационная формула и поляризационное неравенство для (p, q)-линейных отображений // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 128–144.

В работе установлен аналог поляризационной формулы, поляризационного неравенства и формулы Мартина для (p, q)-линейных отображений на нормированых пространствах.