Карпатські математичні
публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, №.1

УДК 515.12+512.58

Ліщинський І.І.

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЖОРДАНА КІЛЕЦЬ ПОЛІНОМІВ

Ліщинський І.І. *Диференціювання Жордана кілець поліномів // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 65–68.

В даній статті встановлено зв'язок між множиною диференціювань Жордана кільця R та множинами диференціювань Жордана кільця поліномів $R[x_1,\dots,x_n]$ та кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1,\dots,x_n]]$. Встановлено також умову, за якої $JDerR$ є лівим R-модулем.

0. Нехай R – асоціативне кільце. Відображення $\delta : R \to R$ називається диференціюванням Жордана кільця R, якщо $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$ та $\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$ для всіх елементів $x, y \in R$ (див. [1],[2]). Множину всіх диференціювань Жордана кільця R звичайно позначають через $JDerR$. Очевидним є те, якщо c – елемент центру $Z(R)$, а $d_1, d_2 \in JDerR$, то $cd_1, d_1 \pm d_2 \in JDerR$, тобто $JDerR$ – лівий $Z(R)$-модуль. Вважається, що кільце вільне від 4-скруту, якщо з рівності $4x = 0$ випливає $x = 0$.

Метою даної статті є встановити зв'язок між множиною диференціювань Жордана кільця R та множинами диференціювань Жордана кільця поліномів $R[x_1,\dots,x_n]$ та кільця формальних степеневих рядів $R[[x_1,\dots,x_n]]$. Знайдено також умову, за якої $JDerR$ є лівим R-модулем.

1. Нехай I – зліченна множина. Тоді родина диференціювань Жордана $\delta = \{\delta_i | i \in I\}$ кільця R називається локально скінченною, якщо для кожного елемента $a \in R$ маємо $\delta_i(a) = 0$ майже для всіх індексів $i \in I$. Через $(jDerR)^\infty$ позначимо сукупність всіх локально скінченних родин диференціювань Жордана кільця R, а через $(JDerR)^\infty$ – сукупність всіх родин диференціювань Жордана кільця R.

Твердження 1. *Нехай $R[x_1,\dots,x_n]$ – кільце поліномів від n комутуючих змінних $x_1,\dots,x_n$ над кільцем R і вільне від 4-скруту. Тоді має місце ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$JDerR[x_1,\dots,x_n] \cong (jDerR)^\infty \oplus Z(R)[x_1,\dots,x_n]^n.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Доведення. 1) Нехай D – яке-небудь диференціювання Жордана кільця поліномів $R[x_1, \ldots, x_n]$. Тоді для кожного елемента $r \in R$ його похідна $D(r) \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Оскільки $R[x_1, \ldots, x_n]$ – підкільце в кільці формальних степеневих рядів $R[[x_1, \ldots, x_n]]$, то формально $D(r)$ можна записати у вигляді степеневого ряду (в якому майже всі коефіцієнти є нульовими):

$$D(r) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n} \delta_{i_1\ldots i_n}(r) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

де $\delta_{i_1\ldots i_n}(r) \in R$ для кожної n-ки $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Легко встановити, що відображення $\delta : R \to R$, де $\delta(r) = \delta_{i_1\ldots i_n}(r) \quad (r \in R)$, є диференціюванням Жордана кільця R і, як наслідок, родина диференціювань Жордана

$$\delta = \{\delta_{i_1\ldots i_n} | (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n\} \tag{1}$$

кільця R є локально скінченною.

2) Тепер нехай $d_j = D(x_j)$, де $j = 1, \ldots, n$. Тоді

$$d_j = \sum a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \tag{2}$$

– деякий поліном кільця $R[x_1, \ldots, x_n]$. Розглянемо як діє диференціювання Жордана на добуток комутуючих між собою елементів $s, t \in R[x_1, \ldots, x_n]$, для цього знаходимо

$$4D(st) = D(4st) = D((s+t)^2 - (s-t)^2) = D((s+t)^2) - D((s-t)^2) =$$

$$= 2(s+t)D(s+t) - 2(s-t)D(s-t) = 4(sD(t) + D(s)t).$$

А оскільки дане кільце вільне від 4-скруту, то $D(st) = sD(t) + D(s)t$. Позаяк $ax_j = x_j a$ та $D(a)x_j = x_j D(a)$ для кожного $a \in R$, то

$$aD(x_j) = D(x_j)a,$$

а звідси

$$\sum a a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = \sum a_{i_1\ldots i_n} a x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

Оскільки a – довільний елемент із R, то $a_{i_1\ldots i_n} \in Z(R)$ для всіх коефіцієнтів полінома d_j. Це означає, що $d_j \in Z(R)[x_1, \ldots, x_n]$.

Підсумовуючи 1) та 2), легко встановити, що відображення

$$\varphi : JDerR[x_1, \ldots, x_n] \to (jDerR)^\infty \oplus Z(R)[x_1, \ldots, x_n]^n,$$

де $\varphi(D) = (\delta, d_1, \ldots, d_n)$, δ – локально скінченна родина (1) диференціювань Жордана кільця R, а d_j – поліном (2), є ізоморфізмом лівих $Z(R)$-модулів. $\square$

Твердження 2. *Нехай $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ – кільце формальних степеневих рядів від n комутуючих змінних $x_1, \ldots, x_n$ над кільцем R і вільне від 4-скруту. Тоді має місце ізоморфізм лівих $Z(R)$-модулів*

$$JDerR[[x_1, \ldots, x_n]] \cong (JDerR)^\infty \oplus Z(R)[[x_1, \ldots, x_n]]^n.$$

Доведення. Аналогічне доведенню твердження 1, а тому ми його опускаємо. □

2. Зрозуміло, якщо кільце R комутативне, то $JDerR$ – лівий R-модуль. Але існують кільця R, які не є комутативними і $JDerR$ є лівим R-модулем. Нами встановлено:

Твердження 3. *Нехай R – кільце. Тоді $JDerR$ – лівий R-модуль в тому і тільки тому випадку, коли*

$$(ax - xa)\delta(x) = 0$$

для будь-яких $a, x \in R$ та $\delta \in JDerR$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $JDerR$ – лівий R-модуль. Тоді для будь-яких $\delta \in JDerR$ та $a, x \in R$ маємо

$$a\delta(x)x + xa\delta(x) = (a\delta)(x^2) = a(\delta(x^2)) = a(\delta(x)x + x\delta(x)) = a\delta(x)x + ax\delta(x),$$

а звідси

$$(ax - xa)\delta(x) = 0.$$

($\Leftarrow$) встановлюється безпосередньо. □

Приклад 1. *Розглянемо поле $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2/(X^2+X+1) = \{0, 1, \alpha, \alpha+1\}$, яке має нетривіальний автоморфізм $\sigma : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$, $\sigma(x) = x^2$ для кожного $x \in \mathbb{F}_4$. Нехай $B = \mathbb{F}_4[X, \sigma]/(X^2) = \mathbb{F}_4 + \mathbb{F}_4 b$, де $b^2 = 0$ та $bx = \sigma(x)b$ для всіх $x \in \mathbb{F}_4$. Очевидним є те, що $JDer\mathbb{F}_4 = Der\mathbb{F}_4 = \{0\}$.*

Нехай $\delta \in DerB$. Тоді $\delta(b) = x + yb$ для деяких елементів $x, y \in \mathbb{F}_4$. Із рівності

$$0 = \delta(b^2) = \delta(b)b + b\delta(b) = (x + yb)b + b(x + yb) = xb + bx = (x + x^2)b \tag{3}$$

випливає, що $x + x^2 = 0$. Це означає, що $x = x^2$, а отже, $x = 0$ або $x = 1$. Правило

$$\delta_z : B \to B, \quad \delta_z(x + yb) = zyb, \text{ де } x, y, z \in \mathbb{F}_4,$$

є диференціюванням, оскільки для всіх $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{F}_4$ вірними є рівності:

$$\delta_z((x_1 + y_1 b)(x_2 + y_2 b)) = \delta(x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2^2)b) = z(x_1 y_2 + y_1 x_2^2)b,$$

$$\delta_z(x_1+y_1 b)(x_2+y_2 b)+(x_1+y_1 b)\delta_z(x_2+y_2 b) = zy_1 b(x_2+y_2 b)+(x_1+y_1 b)zy_2 b = (zy_1 x_2^2+x_1 zy_2)b.$$

Покажемо, що правило

$$\mu_z : B \to B, \quad \mu_z(x + yb) = y(1 + zb), \text{ де } x, y, z \in \mathbb{F}_4,$$

не є диференціюванням:

$$\mu_z((\alpha + b)^2) = \mu_z(\alpha^2 + \alpha b + b\alpha) = \mu_z(\alpha^2 + b) = \mu_z(b) = 1 + zb,$$

$$\mu_z(\alpha + b)(\alpha + b) + (\alpha + b)\mu_z(\alpha + b) = (1 + zb)(\alpha + b) + (\alpha + b)(1 + zb) = zb.$$

Отже, $DerB = \{\delta_z | \ z \in \mathbb{F}_4\}$ *– алгебра Лі, яка складається з 4 елементів. Зрозуміло, що* $DerB \subseteq JDerB$*. Знайдемо диференціювання Жордана кільця* B*, які не є його диференціюваннями.*

Нехай $\delta \in JDerB$*. Тоді* $\delta(b) = x + yb$ *для деяких* $x, y \in \mathbb{F}_4$*. З рівності (3) отримуємо, що* $x = 0$ *або* $x = 1$*. Випадок* $x = 1$ *не підходить (контрприклад можна розглянути той самий, що і для диференціювання). Встановимо, що правило:*

$$\delta_z : B \to B, \quad \delta_z(x + yb) = z(y)b,$$

де $x, y, \in \mathbb{F}_4$ *та* $z(y) : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$ *– адитивне відображення поля* $\mathbb{F}_4$*, є диференціюванням Жордана кільця* B*. Дійсно,*

$$\delta((x + yb)^2) = \delta(x^2 + (xy + yx^2)b) = \delta(x^2 + y(x + x^2)b) = z(y(x + x^2))b,$$

$$\delta(x + yb)(x + yb) + (x + yb)\delta(x + yb) = z(y)b(x + yb) + (x + yb)z(y)b = (x^2 + x)z(y)b.$$

Якщо $x = 0$ *або* $x = 1$*, то* $x + x^2 = 0$*; а якщо* $x = \alpha$ *або* $x = \alpha + 1$*, то* $x + x^2 = 1$*. Тоді рівність* $\delta((x + yb)^2) = \delta(x + yb)(x + yb) + (x + yb)\delta(x + yb)$ *вірна для всіх* $x, y \in \mathbb{F}_4$*. Оскільки* $z(0) = 0$*, а* $z(\alpha + 1) = z(\alpha) + z(1)$*, тобто* $z(\alpha)$ *і* $z(1)$ *можуть набувати довільних значень із поля* $\mathbb{F}_4$*, то лівий* B*-модуль* $JDerB$ *містить 16 елементів.*

Література

1. Бурков В.Д. *Дифференцирования колец многочленов* // Вестник Москов. унив., сер. мех.-мат. — 1981, №2. — С.51-52.

2. Herstein I.N., *Jordan derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 1104–1110.

Прикарпатський університет ім. Василя Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна,

lishchynsky@ukr.net

Надійшло 06.04.2009

Lishchynsky I.I. *Jordan derivations of polynomial rings*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 65–68.

We study connections between the set of Jordan derivations of a ring R and the sets of Jordan derivations of a polynomial ring $R[x_1, \ldots, x_n]$ and formal power series ring $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. We also establish a condition when $JDerR$ is a left R-module.

Лищинский И.И. *Дифференцирования Жордана колец многочленов // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 65–68.

Установлена связь между множеством дифференцирований Жордана кольца R и множествами дифференцирований Жордана кольца многочленов $R[x_1, \ldots, x_n]$ и кольца формальных степенных рядов $R[[x_1, \ldots, x_n]]$. Установлено также условие, при котором $JDerR$ будет левым R-модулем.