Карпатські математичні
публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №.1

УДК 512.538

Заторський Р.А., Семенчук А.В.

# ПЕРІОДИЧНІ РЕКУРЕНТНІ ДРОБИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Заторський Р.А., Семенчук А.В. *Періодичні рекурентні дроби третього порядку* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 72–81.

За допомогою параперманентів трикутних матриць досліджуються періодичні рекурентні дроби третього порядку.

## Вступ

Однією із найбільш актуальних задач чисельного аналізу є задача про раціональні наближення алгебраїчних ірраціональностей. Для квадратичних ірраціональностей ця задача вирішується за допомогою раціональних вкорочень періодичних ланцюгових дробів. Для раціональних наближень ірраціональностей третього та вищих порядків було побудовано ряд алгоритмів, що узагальнюють ланцюгові дроби. При побудові таких алгоритмів використовувалися лінійні однорідні форми, дроби Фарея, матричний підхід тощо. Проте найбільш природним виявився алгоритм Фюрстенау [3], розвинений в [1].

В статті вивчаються раціональні наближення кубічних ірраціональностей за допомогою періодичних рекурентних дробів третього порядку, побудованих на основі алгоритму Фюрстенау. Зауважимо, що випадок одноперіодичних рекурентних дробів довільного порядку досліджено в [1]. Ефективний алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень періодичних рекурентних дробів третього порядку побудовано у [2]. Тому в статті досліджуватимуться двоперіодичні та триперіодичні рекурентні дроби. Зокрема буде встановлено зв'язок значень мішаних періодичних рекурентних дробів із значеннями відповідних періодичних рекурентних дробів.

Наведемо деякі основні поняття, які будуть використані нижче.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
*Ключові слова і фрази:* періодичні рекурентні дроби.

## 1 Основні поняття про парапермаленти та рекурентні дроби

Нехай $K$ — деяке числове поле.

**Означення 1.1** ([4]). *Трикутну таблицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

*чисел із числового поля $K$ назвемо трикутною матрицею, елемент $a_{11}$ — верхнім елементом цієї трикутної матриці, а число $n$ — її порядком.*

**Означення 1.2** ( [4]). *Нехай $A$ — трикутна матриця (1). Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці $A$ називають відповідно числа:*

$$\mathrm{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\}$$

*та*

$$\mathrm{pper(A)} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

*де сумування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n,$$

*а символом $\{a_{ij}\}$ позначено факторіальний добуток елемента $a_{ij}$, що задається рівністю*

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

**Означення 1.3** ([1]). *Нехай $a_{ij}, (1 \leqslant j \leqslant i < \infty)$ — деякі цілі числа. Алгебраїчні об'єкти вигляду*

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|cccccccc} a_{11} & & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & & & \\ \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \ldots & a_{1,n-1} & & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \ldots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \ldots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \end{array}\right]_{\infty} \tag{2}$$

*та*

$$\frac{P_m}{Q_m}=\left[\begin{array}{c|ccccccc} a_{11} & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m} \end{array}\right]_m,$$

*де*

$$P_m=\left[\begin{array}{cccccccc} a_{11} & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m} \end{array}\right]_m,$$

$$Q_m=\left[\begin{array}{cccccccc} a_{12} & & & & & & & \\ \frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-3,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\ \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-2,n+1}} & \dots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+2}}{a_{n-1,n+2}} & \dots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m} \end{array}\right]_{m-1}$$

*— параперманенти відповідних трикутних матриць, назвемо відповідно рекурентним дробом $n$-го порядку та його $m$-тим раціональним вкороченням.*

## 2 Періодичні рекурентні дроби

**Означення 2.1** ([1]). *Рекурентний дріб $n$-го порядку (2) називають $k$-періодичним, якщо його елементи задовольняють рівність*

$$a_{i,rk+j}=a_{i,j},\ i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,k.$$

Встановимо зв'язки періодичних рекурентних дробів третього порядку із дійсними додатніми коренями кубічних рівнянь.

Розглянемо періодичний рекурентний дріб третього порядку з періодом 2

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

де $q_i$ та $p_i$ – додатні числа. Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}} = \frac{q_1[q_2]_{n-1} + p_2[q_1]_{n-2} + r_1[q_2]_{n-3}}{[q_2]_{n-1}} = q_1 + \frac{p_2}{\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}. \tag{3}$$

В цій рівності параперманент $i$-го порядку з верхнім елементом $q_j,\ j = 1, 2$, позначено через $[q_j]_i$. Аналогічно розкладаємо чисельник дробу $\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = q_2 + \frac{p_1}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \frac{[q_2]_{n-3}}{[q_1]_{n-4}}}. \tag{4}$$

Нехай

$$\lim_{m\to\infty} \frac{[q_1]_m}{[q_2]_{m-1}} = x,\ \lim_{m\to\infty} \frac{[q_2]_m}{[q_1]_{m-1}} = y.$$

Тоді, спрямовуючи в рівностях (3), (4) $n$ до нескінченності, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_1}{xy}, \\ y = q_2 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}, \end{cases}$$

з якої знаходимо, що

$$y = \frac{p_2 x + r_1}{x^2 - q_1 x},$$

а $x$ є додатнім коренем кубічного рівняння

$$(q_2p_2 + r_2)x^3 = (q_1q_2p_2 + p_2^2 + 2q_1r_2 - p_1p_2 - q_2r_1)x^2$$

$$+(q_1p_1p_2 + q_1q_2r_1 - 2p_2r_1 - q_1^2r_2 - p_1r_1)x + r_1(q_1p_1 + r_1),$$

або за допомогою параперманентів

$$\begin{bmatrix} q_2 & \\ \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} x^3 = \left( \begin{bmatrix} q_1 & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & \\ \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} - r_1 \begin{bmatrix} q_2 \end{bmatrix} \right) x^2$$

$$+ \left( \begin{bmatrix} q_1 & & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 & \\ 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} + r_1 \left( \begin{bmatrix} q_1 & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \end{bmatrix} \right) \right) x + r_1 \begin{bmatrix} q_1 & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 \end{bmatrix}.$$

**Приклад 2.1.** *Нехай* $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, *тоді рекурентний дріб матиме вигляд*

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} 3 & & & & & & \\ \frac{2}{2} & 2 & & & & & \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

*а раціональні вкорочення, які наближують дійсний корінь*

$$x = \frac{1}{18}(16 + \sqrt[3]{30664 + 162\sqrt{26118}} + \sqrt[3]{30664 - 162\sqrt{26118}}) \approx 3,941055084$$

*кубічного рівняння*

$$6x^3 = 16x^2 + 21x + 36,$$

*дорівнюють*

$$\delta_1 = \frac{3}{1} = 3, \quad \delta_2 = \frac{8}{2} = 4, \quad \delta_3 = \frac{36}{9} = 4,$$

$$\delta_4 = \frac{94}{24} \approx 3,916, \quad \delta_5 = \frac{414}{105} \approx 3,942, \quad \delta_6 = \frac{1088}{276} \approx 3,9420,$$

$$\delta_7 = \frac{4788}{1215} \approx 3,9407, \quad \delta_8 = \frac{12580}{3192} \approx 3,9411, \quad \delta_9 = \frac{55368}{14049} \approx 3,94106,$$

$$\delta_{10} = \frac{145472}{36912} \approx 3,941048, \quad \delta_{11} = \frac{640260}{162459} \approx 3,941055$$

$$\delta_{12} = \frac{1682200}{426840} \approx 3,94105519, \quad \delta_{13} = \frac{7403796}{1878633} \approx 3,94105501,$$

$$\delta_{14} = \frac{19452512}{4935864} \approx 3,941055102, \quad \delta_{15} = \frac{85615524}{21724011} \approx 3,94105508,$$

$$\delta_{16} = \frac{224943664}{57077016} \approx 3,941055082, \delta_{17} = \frac{990035100}{251210673} \approx 3,941055084,$$

$$\delta_{18} = \frac{2601188576}{660023400} \approx 3,941055084.$$

Тепер розглянемо періодичний рекурентний дріб третього порядку з періодом 3:

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

де $q_i$ та $p_i$ – додатні числа. Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = \frac{q_1[q_2]_n + p_2[q_3]_{n-1} + r_3[q_1]_{n-2}}{[q_2]_n} = q_1 + \frac{p_2}{\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}} + \frac{r_3}{\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} \cdot \frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}}.$$

Розкладемо чисельник дробу $\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = \frac{q_2[q_3]_{n-1} + p_3[q_1]_{n-2} + r_1[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-1}} = q_2 + \frac{p_3}{\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}.$$

Розкладемо чисельник дробу $\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = \frac{q_3[q_1]_{n-2} + p_1[q_2]_{n-3} + r_2[q_3]_{n-4}}{[q_1]_{n-2}} = q_3 + \frac{p_1}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \frac{[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-4}}}.$$

Нехай існують границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = y,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = z,$$

тоді останні три рівності запишуться у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_3}{yz}, \\ y = q_2 + \frac{p_3}{z} + \frac{r_1}{zx}, \\ z = q_3 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}. \end{cases} \tag{5}$$

Звідси маємо кубічне рівняння

$$(q_2q_3p_2p_3 - q_2^2q_3r_3 + q_2p_3r_2 - q_2p_3r_3 + p_2p_3^2)x^3$$
$$= (q_1q_2q_3p_2p_3 - q_2q_3p_2r_1 - q_1q_2^2q_3r_3 - q_2q_3p_2r_3 + q_3p_2^2p_3 + q_2^2p_1r_3 - q_2p_1p_2p_3$$
$$+2q_1q_2p_3r_2 - q_2r_1r_2 + q_2r_2r_3 + p_2p_3r_2 - q_1q_2p_3r_3 + q_2r_1r_3 - q_2r_3^2 + q_1p_2p_3^2 + p_2p_3r_3$$
$$-2p_2p_3r_1)x^2 + (q_1q_2q_3p_2r_1 + q_3p_2^2r_1 - q_2p_1p_2r_1 - q_1q_2^2p_1r_3 + q_1q_2p_1p_2p_3 - q_2p_1p_2r_3$$
$$+p_1p_2^2p_3 + 2q_1q_2r_1r_2 - q_1^2q_2p_3r_2 - q_1q_2r_2r_3 - q_1p_2p_3r_2 + p_2r_1r_2 - p_2r_2r_3 - q_1q_2r_1r_3$$
$$+2q_1p_2p_3r_1 - p_2r_1^2 + p_2r_1r_3)x + r_1(q_1q_2p_1p_2 - q_1^2q_2r_2 + p_1p_2^2 - q_1p_2r_2 + q_1p_2r_1),$$

або за допомогою параперманентів

$$\begin{bmatrix} q_2 & & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} x^3 = \left( \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_2 & & & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 & & \\ 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & \frac{r_2}{q_2} & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} - r_1 \begin{bmatrix} q_2 & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} \right) x^2$$

$$+\left(\begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ 0 & \frac{r_1}{p_1} & p_1 & & \\ 0 & 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 & \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{q_2} & \frac{-q_2r_3}{p_3} & p_3 \end{bmatrix} + r_1\left(\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\ \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_2 & & \\ \frac{r_1}{p_1} & p_1 & \\ 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix}\right)\right)x + r_1\begin{bmatrix} q_1 & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\ 0 & \frac{r_1}{p_1} & p_2 & \\ 0 & 0 & \frac{-q_1r_2}{p_2} & p_2 \end{bmatrix}.$$

**Приклад 2.2.** *Нехай* $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, *тоді рекурентний дріб матиме вигляд*

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} 3 & & & & & & \\ \frac{2}{2} & 2 & & & & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & \\ 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right],$$

*а раціональні вкорочення, які наближують дійсний корінь*

$$x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt[3]{1630 + 45\sqrt{561}} + \sqrt[3]{1630 - 45\sqrt{561}}) \approx 3,863421135$$

*кубічного рівняння*

$$4x^3 = 2x^2 + 38x + 54,$$

*або*

$$2x^3 = x^2 + 19x + 27,$$

*дорівнюють*

$$\delta_1 = \frac{3}{1} = 3, \quad \delta_2 = \frac{8}{2} = 4, \quad \delta_3 = \frac{12}{3} = 4,$$

$$\delta_4 = \frac{69}{18} \approx 3,833, \quad \delta_5 = \frac{178}{46} \approx 3,8696, \quad \delta_6 = \frac{1518}{393} \approx 3,8626,$$

$$\delta_7 = \frac{3910}{1012} \approx 3,86364, \quad \delta_8 = \frac{5687}{1472} \approx 3,863451, \quad \delta_9 = \frac{33345}{8631} \approx 3,863399,$$

$$\delta_{10} = \frac{85884}{22230} \approx 3,8634278, \quad \delta_{11} = \frac{124916}{32333} \approx 3,86342127,$$

$$\delta_{12} = \frac{732435}{189582} \approx 3,8634206, \quad \delta_{13} = \frac{1886470}{488290} \approx 3,86342133,$$

$$\delta_{14} = \frac{2743821}{710205} \approx 3,863421125, \quad \delta_{15} = \frac{16088178}{4164231} \approx 3,863421121,$$

$$\delta_{16} = \frac{41436938}{10725452} \approx 3,863421141, \quad \delta_{17} = \frac{60268937}{15599888} \approx 3,863421135,$$

$$\delta_{18} = \frac{353382159}{910176068} \approx 3,863421135.$$

## 3 Мішані періодичні рекурентні дроби

Розглянемо мішаний періодичний рекурентний дріб третього порядку з передперіодом 4 і періодом 3

$$\left[\begin{array}{c|ccccccccc}
q_0^* & & & & & & & & & \\
\frac{p_1^*}{q_1^*} & q_1^* & & & & & & & & \\
\frac{r_2^*}{p_2^*} & \frac{p_2^*}{q_2^*} & q_2^* & & & & & & & \\
0 & \frac{r_3^*}{p_3^*} & \frac{p_3^*}{q_3^*} & q_3^* & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots
\end{array}\right]_\infty,$$

де $q_j^*$, $q_i$ та $p_i$ – додатні числа. Розкладемо чисельник цього дробу за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(5)$, а знаменник — за елементами таблиці $T(4)$. Отримаємо,

$$\frac{[q_0^*]_{n+4}}{[q_1^*]_{n+3}}=\frac{[q_0^*]_4(q_1[q_2]_{n-1}+p_2[q_3]_{n-2}+r_3[q_4]_{n-3})+[q_0^*]_3(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_0^*]_2r_1[q_2]_{n-1}}{[q_1^*]_3(q_1[q_2]_{n-1}+p_2[q_3]_{n-2}+r_3[q_4]_{n-3})+[q_1^*]_2(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_1^*]_1r_1[q_2]_{n-1}}.$$

В чисельнику і знаменнику вираз у перших дужках є розкладом параперманента $[q_1]_n$ за елементами першого стовпця

$$\frac{[q_0^*]_4[q_1]_n+[q_0^*]_3(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_0^*]_2r_1[q_2]_{n-1}}{[q_1^*]_3[q_1]_n+[q_1^*]_2(p_1[q_2]_{n-1}+r_2[q_3]_{n-2})+[q_1^*]_1r_1[q_2]_{n-1}}.$$

Перегрупуємо доданки

$$\frac{[q_0^*]_4[q_1]_n+([q_0^*]_3p_1+[q_0^*]_2r_1)[q_2]_{n-1}+[q_0^*]_3r_2[q_3]_{n-2}}{[q_1^*]_3[q_1]_n+([q_1^*]_2p_1+[q_1^*]_1r_1)[q_2]_{n-1}+[q_1^*]_2r_2[q_3]_{n-2}},$$

поділимо чисельник і знаменник на $[q_3]_{n-2}$, отримаємо

$$\frac{[q_0^*]_4\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+([q_0^*]_3p_1+[q_0^*]_2r_1)\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+[q_0^*]_3r_2}{[q_1^*]_3\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+([q_1^*]_2p_1+[q_1^*]_1r_1)\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}+[q_1^*]_2r_2}.$$

Нехай існують границі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[q_0^*]_{n+4}}{[q_1^*]_{n+3}}=x^*,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}}=x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_3]_{n-2}}=y.$$

Тоді останній вираз запишеться у вигляді

$$x^*=\frac{[q_0^*]_4xy+([q_0^*]_3p_1+[q_0^*]_2r_1)y+[q_0^*]_3r_2}{[q_1^*]_3xy+([q_1^*]_2p_1+[q_1^*]_1r_1)y+[q_1^*]_2r_2},$$

де $x$, $y$ – розв'язки системи (5) для періодичного рекурентного дробу

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_1 & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\
0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & \\
0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots
\end{array}\right].$$

**Приклад 3.1.** *Нехай* $q_0^* = 3$, $q_1^* = 2$, $q_2^* = 3$, $q_3^* = 2$, $p_1^* = 4$, $p_2^* = 3$, $p_3^* = 4$, $r_2^* = 1$, $r_3^* = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 1$, *тоді мішаний рекурентний дріб матиме вигляд*

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc}
3 & & & & & & & & & & \\
\frac{4}{2} & 2 & & & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & & & & & \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{2} & 2 & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 1 & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots
\end{array}\right]_\infty.$$

*Значення мішаного періодичного рекурентного дробу збігається до числа*

$$x^* = \frac{127xy + 100y + 120}{27xy + 22y + 27},$$

*де*

$$x = \frac{1}{9} \cdot (\sqrt[3]{1630 + 45 \cdot \sqrt{561}} + \sqrt[3]{1630 - 45 \cdot \sqrt{561}} + 4) \approx 2.9089474235938$$

*— корінь кубічного рівняння*

$$9x^3 = 12x^2 + 33x + 24,$$

*або*

$$3x^3 = 4x^2 + 11x + 8,$$

*два інші корені якого – комплексні, а*

$$y = \frac{6}{x^2 - x - 4}.$$

*Отже,*

$$x^* \approx 4.5462675971938.$$

*Знайдемо раціональні вкорочення цього дробу, отримаємо*

$$\delta_1 = \frac{10}{2} = 5, \quad \delta_2 = \frac{40}{9} = 4,44, \quad \delta_3 = \frac{123}{27} = 4,555,$$

$$\delta_4 = \frac{346}{76} \approx 4,553, \quad \delta_5 = \frac{1527}{336} \approx 4,5446, \quad \delta_6 = \frac{1996}{439} \approx 4,54670,$$

$$\delta_7 = \frac{7738}{1702} \approx 4,54642, \quad \delta_8 = \frac{33783}{7431} \approx 4,546225, \quad \delta_9 = \frac{43517}{9572} \approx 4,546281,$$

$$\delta_{10} = \frac{170076}{37410} \approx 4,546271, \quad \delta_{11} = \frac{742128}{163239} \approx 4,5462665,$$

$$\delta_{12} = \frac{955721}{210221} \approx 4,54626798, \quad \delta_{13} = \frac{3735850}{821740} \approx 4,54626767,$$

$$\delta_{14} = \frac{16301097}{3585600} \approx 4,546267570, \quad \delta_{15} = \frac{20992668}{4617561} \approx 4,54626761,$$

$$\delta_{16} = \frac{82059230}{18049802} \approx 4,5462675990, \quad \delta_{17} = \frac{358058985}{78758889} \approx 4,5462675965,$$

$$\delta_{18} = \frac{461110883}{101426252} \approx 4,54626759747.$$

## Література


1. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ: “Сімик”, 2010. – 508 с.
2. Семенчук А.В. *Алгоритм обчислення раціональних вкорочень періодичного рекурентного дробу 3-го порядку* // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – №.1. – С. 34-42.
3. Furshtenau E. *ber Kettenbrüche hoherer Ordnung*, Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik, (1876), 133-135.
4. Zatorsky R.A. *Theory of paradeterminants and its applications*, Algebra and Diskrete Mathematics, №.1 (2007), 109-138.


Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
м. Івано-Франківськ, Україна

*Надійшло 14.07.2010*

---

Zatorsky R.A., Semenchuk A.V. *Periodic recurrent fractions of third degree*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 72–81.

Periodic recurrent fractions of third degree are investigated by means of parapermanents of triangular matrices.

Заторский Р.А., Семенчук А.В. *Периодичиские рекуррентные дроби третьего порядка* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 72–81.

При помощи параперманентов треугольных матриц исследуются периодичиские рекуррентные дроби третьего порядка.