Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.51

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО І СУКУПНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 10–20.

Досліджується проблема: які з всюди щільних підпросторів L банахового простору $C(Y)$ неперервних на компакті Y функцій і топологічних просторів X мають ту властивість, що для кожної нарізно чи сукупно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує така послідовність нарізно або сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ для довільних $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$? Зокрема з'ясовано: коли простір $C(Y)$ має базис, то кожна сукупно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має сукупно неперервні апроксимації f_n такого роду.

1. Вперше наближення нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ за допомогою сукупно неперервних функцій $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які є кусково лінійними відносно другої змінної, розглянув А. Лебеґ у своїй першій друкованій праці [10], де він встановив, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера. М. Цуджі [15] зауважив, що конструкцію Лебеґа можна застосувати для доведення теореми Бера про проекцію множини точок розриву нарізно неперервних функцій. У праці [1] за допомогою многочленів Бернштейна було показано, що для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує така послідовність сукупно неперервних і поліноміальних відносно другої змінної функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $f_n^x(y) = f_n(x,y) \rightrightarrows f(x,y) = f^x(y)$ на [0,1] при $n \to \infty$ для кожного $x \in [0,1]$.

Після цього стало зрозуміло, що кожен метод апроксимації неперервних функцій породжує відповідну задачу про наближення нарізно неперервних функцій, і, таким чином, виникає багато питань, які пов'язують теорію наближень з теорією нарізно неперервних функцій. Результати дослідження цих питань доповідалися на трьох наукових конференціях [12, 3, 2], другому Всеукраїнському математичному конгресі [5], академії, присвяченій Ю. Шаудеру, у Львівському університеті (25 вересня 2009), науковому семінарі з теорії функцій і функціонального аналізу в Чернівецькому університеті (15

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 65D15.

Ключові слова і фрази: нарізно і сукупно неперервні функції, наближення нарізно і сукупно неперервних функцій.

© Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., 2010

жовтня 2009) і семінарі “Сучасні проблеми теорії ймовірності і математичного аналізу” у Ворохті [7, 4], організованому Прикарпатським університетом.

У цій праці ми обговорюємо проблеми, поставлені в [7], розширюємо їх список і даємо доведення теорем, сформульованих у [7, 2].

2. Для топологічного простору Y символом $C(Y)$ ми позначаємо простір усіх неперервних дійснозначних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$, а символом $C_p(Y)$ — цей же простір, наділений топологією поточкової збіжності, що породжується сукупністю переднорм $q_y(g) = |g(y)|$, де y пробігає множину Y [8, с.30].

Нехай X — ще один топологічний простір. Для функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Функція f називається *нарізно неперервною*, якщо функції $f^x : Y \to \mathbb{R}$ і $f_y : X \to \mathbb{R}$— неперервні для довільних $x \in X$ і $y \in Y$. Сукупність усіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ ми позначаємо символом $CC(X \times Y)$.

Кожній функції $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ поставимо у відповідність відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^Y$, для якого $\varphi(x) = f^x$ для кожного $x \in X$. Про φ кажуть, що це — *асоційоване з* f *відображення* або *вертикальне розшарування функції* f.

Теорема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори і φ — вертикальне розшарування функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) $f \in CC(X \times Y)$;

(i) $\varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ — неперервне.

Доведення. (i)⇒(ii). Нехай $f \in CC(X \times Y)$. Тоді для кожного $x \in X$ за означенням $\varphi(x) = f^x \in C(Y)$, отже, $\varphi(X) \subseteq C(Y)$. Покажемо, що відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ — неперервне в кожній точці $x \in X$. Зафіксуємо якусь точку x_0 з X і розглянемо базисний окіл V точки $g_0 = \varphi(x_0)$ у просторі $C_p(Y)$, що складається з усіх точок $g \in C_p(Y)$, для яких

$$\max_{k=1,\dots,n} |g(y_k) - g_0(y_k)| < \varepsilon,$$

де $y_1, \dots, y_n \in Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки всі функції f_{y_k} при $k = 1, \dots, n$ неперервні в точці x_0, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що для довільного $x \in U$ і кожного $k = 1, \dots, n$ виконується нерівність $|f_{y_k}(x) - f_{y_k}(x_0)| < \varepsilon$. Нехай $x \in U$ і $g = \varphi(x)$. Тоді для кожного $k = 1, \dots, n$

$$|g(y_k) - g_0(y_k)| = |f^x(y_k) - f^{x_0}(y_k)| = |f_{y_k}(x) - f_{y_k}(x_0)| < \varepsilon,$$

отже, $g \in V$. Таким чином, $\varphi(U) \subseteq V$, що і дає нам неперервність відображення φ у точці x_0.

(ii)⇒(i). З умови $\varphi(X) \subseteq C(Y)$ випливає, що $f^x \in C(Y)$ для кожного $x \in X$. Очевидно, що для кожного $y \in Y$ функціонали $\delta_y : C_p(Y) \to \mathbb{R}$, $\delta_y(g) = g(y)$ — неперервні. Тому з неперервності відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ негайно випливає неперервність всіх функцій $f_y : X \to \mathbb{R}$, адже $f_y = \delta_y \circ \varphi$, бо $(\delta_y \circ \varphi)(x) = \delta_y(\varphi(x)) = f^x(y) = f_y(x)$. □

3. Для компактного простору Y символом $C_u(Y)$ ми позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$, де $\|\cdot\|$ — рівномірна норма на $C(Y)$, що визначається рівністю

$$\|g\| = \max_{y\in Y} |g(y)|.$$

Для топологічних просторів X і Y символом $C(X \times Y)$ ми позначаємо *простір усіх сукупно неперервних функцій* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, тобто функцій, які є неперервними на топологічному добутку $X \times Y$. Ясно, що $C(X \times Y) \subseteq CC(X \times Y)$.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір і φ — вертикальне розшарування функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) $f \in C(X \times Y)$;

(ii) $\varphi(X) \subseteq C(Y)$ *і відображення* $\varphi : X \to C_u(Y)$ *— неперервне.*

Доведення. (i)⇒(ii). Нехай $f \in C(X \times Y)$. Тоді $f \in CC(X \times Y)$, отже, $\varphi(X) \subseteq C(Y)$ за теоремою 1.

Доведемо, що відображення $\varphi : X \to C_u(Y)$ — неперервне. Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f — сукупно неперервна, то для кожного $y \in Y$ можна знайти такі відкриті околи U_y точки x_0 в X і V_y точки y в Y, що

$$|f(u, v) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

як тільки $(u, v) \in U_y \times V_y$. Система $\{V_y : y \in Y\}$ — це відкрите покриття компактного простору Y. Тому існують такі точки $y_1, \dots, y_n$, що

$$Y = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}.$$

Покладемо $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{y_k}$. Зрозуміло, що U — це окіл точки x_0 у просторі X. Нехай $x \in U$ і $y \in Y$. Знайдемо такий індекс $k = 1, \dots, n$, що $y \in V_{y_k}$. Тоді

$$|f^x(y) - f^{x_0}(y)| = |f(x, y) - f(x_0, y)| \le |f(x, y) - f(x_0, y_k)| + |f(x_0, y_k) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

бо x і x_0 входять в U_{y_k}, а $y \in V_{y_k}$. Тому і

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| = \max_{y\in Y} |f^x(y) - f^{x_0}(y)| < \varepsilon,$$

як тільки $x \in U$, а це і дає нам неперервність φ у точці x_0.

(ii)⇒(i). Нехай $\varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi : X \to C_u(Y)$ — неперервне. Розглянемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і доведемо, що функція f неперервна в точці p_0. Для даного $\varepsilon > 0$ знайдемо такий окіл U точки x_0 в X, що $\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $x \in U$. Скориставшись неперервністю функції $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$ у точці y_0, знайдемо такий окіл V точки y_0 в Y, що $|f^x(y) - f^{x_0}(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки $y \in V$. Тоді для точки $p = (x, y) \in U \times V$ будемо мати

$$|f(p) - f(p_0)| \le |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| =$$
$$|f^x(y) - f^{x_0}(y)| + |f^{x_0}(y) - f^{x_0}(y_0)| \le \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

що і дає нам неперервність f у точці p_0. □

4. Для підпростору L простору $C(Y)$ покладемо

$$CL(X \times Y) = \{f \in CC(X \times Y) : \varphi(X) \subseteq L\},$$

де, як і раніше, φ — асоційоване з f відображення.

Нехай Y — компактний простір і L — всюди щільний підпростір $C_u(Y)$. Розглянемо такі проблеми:

Проблема I $/I'/$. Для яких підпросторів L для кожної функції $f \in CC(X \times Y)$ існує послідовність функцій $f_n \in CL(X \times Y)$ $/f_n \in CL(X \times Y) \cap C(X \times Y)/$ така, що $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$?

Проблема II $/II'/$. Для яких підпросторів L для кожної функції $f \in C(X \times Y)$ існує послідовність функцій $f_n \in CL(X \times Y) \cap C(X \times Y)$ $/f_n \in CL(X \times Y)/$ така, що $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$?

Неперервне відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ / $\varphi : X \to C_u(Y)$ / назвемо *p-неперервним* /*u-неперервним*/ відображенням. З теорем 1 і 2 випливає, що p-неперервні відображення відповідають нарізно неперервним функціям, а u-неперервні — сукупно неперервним. Тому вказані проблеми можна переформулювати в еквівалентному вигляді так:

Проблема $\alpha\beta$. Нехай $\alpha = p, u$, $\beta = p, u$. Для яких підпросторів L для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує послідовність β-неперевних відображень $\varphi_n : X \to L$ така, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X?

Таким чином, поставлені спочатку проблеми I, I', II, II' рівносильні відповідно проблемам pp, pu, uu, up.

Використовуючи аксіому вибору і умову $\overline{L} = C_u(Y)$, легко для довільного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ побудувати послідовність відображень $\varphi_n : X \to L$ таких, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X. А от чи можна для кожного p-неперервного чи u-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ зберегти при побудові апроксимуючих відображень $\varphi_n : X \to L$ тип його неперервності або його підсилити чи послабити — оце і є суть наших проблем I, I', II, II'.

Нехай знову $\alpha = p, u$, $\beta = p, u$ і L — підпростір $C_u(Y)$. Ми будемо говорити, що L — це *$\alpha\beta$-простір* для простору X, якщо для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує послідовність β-неперевних відображень $\varphi_n : X \to L$ така, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ на X. Таким чином, проблема $\alpha\beta$ полягає у тому, щоб для топологічного простору X і компактного простору Y описати всі $\alpha\beta$-простори для X у $C_u(Y)$.

5. Для $\alpha = p, u$ і $\beta = p, u$ неперервний оператор $A : C_\alpha(Y) \to C_\beta(Y)$ ми називаємо *$\alpha\beta$-неперервним.* Таким чином, ми одержуємо чотири типи неперервності операторів $A : C(Y) \to C(Y)$. Вони пов'язані між собою такими імплікаціями:

$$\begin{array}{ccc} pu\text{-неперервність} & \Rightarrow & pp\text{-неперервність} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ uu\text{-неперервність} & \Rightarrow & up\text{-неперервність} \end{array}$$

Це негайно випливає з того, що топологія $\mathcal{T}_u$ рівномірної збіжності на просторі $C(Y)$, тобто топологія простору $C_u(Y)$ мажорує топологію $\mathcal{T}_p$ поточкової збіжності на $C(Y)$, тобто топологію простору $C_p(Y)$.

Нехай X і Y — топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — неперервна відносно другої змінної функція і $A : C(Y) \to C(Y)$ — деякий оператор. Тоді формулою

$$g(x, y) = (Af^x)(y)$$

визначається деяка функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка теж буде неперервною відносно другої змінної. Нехай $\varphi : X \to C(Y)$ і $\psi : X \to C(Y)$ — відображення, асоційовані з функціями f і g відповідно. Тоді

$$\psi(x) = g^x = Af^x = A(\varphi(x))$$

для кожного $x \in X$, тобто $\psi = A \circ \varphi$. Тому на основі теорем 1 і 2 та теореми про неперервність композиції отримуємо наступний результат.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — компактний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція, неперервна відносно другої змінної, $A : C(Y) \to C(Y)$ — оператор, і для $x \in X$, $y \in Y$*

$$g(x, y) = (Af^x)(y).$$

Тоді:

а) $f \in CC(X \times Y)$ і A — pp-неперервний $\Rightarrow g \in CC(X \times Y)$;

б) $f \in CC(X \times Y)$ і A — pu-неперервний $\Rightarrow g \in C(X \times Y)$;

в) $f \in C(X \times Y)$ і A — up-неперервний $\Rightarrow g \in CC(X \times Y)$;

г) $f \in C(X \times Y)$ і A — uu-неперервний $\Rightarrow g \in C(X \times Y)$.

6. Послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$ називається *апроксимуючою* для підпростору L простору $C(Y)$, якщо $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. З аксіоми вибору негайно випливає, що для кожного всюди щільного підпростору L простору $C_u(Y)$ існує апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$.

Апроксимуючу послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$ ми називаємо *$\alpha\beta$-апроксимуючою для L* ($\alpha, \beta = p, u$), якщо всі відображення A_n є $\alpha\beta$-неперервними.

Нехай s — одна з комбінацій pp, pu, uu, up. Підпростір L простору $C(Y)$ ми називатимемо *as-простором*, якщо існує s-апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$.

Теорема 4. *Нехай Y — компактний простір і L — підпростір простору $C(Y)$ і $s \in \{pp, pu, up, uu\}$. Тоді наступні властивості рівносильні:*

(i) L є as-простором;

(ii) L є s-простором для кожного топологічного простору X.

Доведення. (i)$\Rightarrow$ (ii). Припустимо, що L — це as-простір і X — довільний топологічний простір. Тоді існує s-апроксимуюча послідовність операторів $A_n : C(Y) \to L$. Для функції $f \in CC(X \times Y)$ розглянемо функції $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, які визначаються так:

$$f_n(x, y) = (A_n f^x)(y).$$

Ясно, що $f_n^x = A_n f^x \to f^x$ в $C_u(Y)$для кожного $x \in X$, причому $f_n^x \in L$ для кожного n. Якщо $f \in CC(X \times Y)$ і s — це pp чи pu, то згідно з теоремою 3 отримуємо, що $f_n \in CC(X \times Y)$ чи $f_n \in C(X \times Y)$ відповідно, отже, L – це s-простір для X. Якщо ж $f \in C(X \times Y)$ і $s = uu$ або up, то знову з теореми 3 випливає, що $f_n \in C(X \times Y)$ або $f_n \in CC(X \times Y)$ відповідно, отже, і тут L є s-простором.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Нехай навпаки L є s-простором для кожного топологічного простору X, де $s = \alpha\beta$, $\alpha = p$ або u, і $\beta = p$ або u. Тоді для кожного α-неперервного відображення $\varphi : X \to C(Y)$ існує послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$ така, що $\varphi_n(g) \to \varphi(g)$ на X у просторі $C_u(Y)$. Візьмемо за X топологічний простір $C_\alpha(Y)$. Тотожне відображення $\varphi : X \to C(Y)$, $\varphi(g) = g$, очевидно — α-неперервне. Тому існує така послідовність β-неперервних відображень $\varphi_n : X \to L$, що $\varphi_n(g) \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Оператори $A_n : C(Y) \to L$, $A_n g = \varphi_n(g)$, є $\alpha\beta$-неперервними і $A_n g \to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Таким чином, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – це $\alpha\beta$-апроксимуюча послідовність для L. □

Відповідно до проблем $\alpha\beta$ з п.4, для кожного $s = pp, pu, uu, up$ постає

***Проблема** III_s.* Дослідити, які всюди щільні в $C_u(Y)$ підпростори будуть as-просторами?

Введені у цьому пункті класи просторів L пов'язані між собою такими імплікаціями:

$$\begin{array}{ccc} L - apu\text{-простір} & \Rightarrow & L - app\text{-простір} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ L - auu\text{-простір} & \Rightarrow & L - aup\text{-простір} \end{array}$$

У зв'язку з цим постає і наступна

***Проблема** IV.* Чи вірно, що інших зв'язків між as-просторами, окрім вказаних на схемі, не існує?

7. Наведемо деякі приклади апроксимуючих послідовностей операторів.

Приклад 1. *Оператори Бернштейна*

$$(B_n g)(y) = \sum_{n=0}^{n} C_n^k g\left(\frac{k}{n}\right) y^k (1-y)^{n-k}$$

утворюють pu-апроксимуючу послідовність для підпростору P всіх алгебраїчних поліномів у просторі $C[0,1]$ (див. [1]).

Приклад 2. *Нехай M — підпростір $C[0,1]$, що складається з усіх неперервних кусково-лінійних функцій $h : [0,1] \to \mathbb{R}$. Співставимо кожній функції $g \in C[0,1]$ функцію $h = A_n g \in M$, графіком якої є ламана з вершинами в точках $\left(\frac{k}{n}, g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, де $k = 0, 1, \ldots, n$. Легко перевірити, що $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — це pu-апроксимуюча послідовність для підпростору M. Така послідовність фактично розглядалася в [10], [15].*

Приклад 3. *Позначимо символом $C_{2\pi}$ банахів простір неперервних 2π-періодичних функцій $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з нормою $\|g\| = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$. Нехай $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — одиничне коло на площині $\mathbb{C}$. Якщо співставити кожній функції $h \in C(\mathbb{S})$ функцію $g = Uh \in C_{2\pi}$, для якої $g(y) = h(e^{iy})$ для $y \in \mathbb{R}$, то ми отримаємо ізометрію $U : C_u(\mathbb{S}) \to C_{2\pi}$. Ця ізометрія дозволяє ототожнити простір $CC(X \times \mathbb{S})$ з простором $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$ нарізно неперервних 2π-періодичних відносно другої змінної функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а простір $C(X \times \mathbb{S})$ — з відповідним підпростором простору $CC_{2\pi}(X \times \mathbb{R})$, що складається з сукупно неперервних функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тому для підпросторів простору $C_{2\pi}$ можна ввести ті ж поняття, що й для підпросторів простору $C_u(\mathbb{S})$, як це ми робили раніше.*

Зокрема, послідовність операторів Джексона

$$(J_n g)(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g\left(y_k\right) K_n(y - y_k),$$

де $y_k = \frac{2k\pi}{n+1}$ і $K_n(t) = \frac{2}{n+1}\left(\frac{sin\frac{(n+1)t}{2}}{2sin\frac{t}{2}}\right)^2$ — ядра Фейєра, є pu-апроксимуючою для підпростору T всіх тригонометричних поліномів у просторі $C_{2\pi}$.

Але вже послідовність операторів Фейєра

$$(F_n g)(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(y + t) K_n(t) dt$$

є uu-апроксимуючою для T, але не pp-апроксимуючою, а значить, і не pu-апроксимуючою для T. Ці результати були анонсовані у [4] і доведені в [6].

8. За допомогою базису Фабера-Шаудера в $C_u[0,1]$ і теореми про близькі базиси можна розв'язати проблему III_{uu} для простору $C[0,1]$.

Нагадаємо, базис Фабера-Шаудера простору $C_u[0,1]$ будується так [14, с.31]. Кожному двійково-раціональному числу $r = \frac{2k-1}{2^n}$, де $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, співставимо кусково-лінійну функцію $\varphi_r : [0,1] \to \mathbb{R}$, графіком якої є ламана з вершинами $\big(0,0\big)$, $\big(\frac{k-1}{2^{n-1}}, 0\big)$, $\big(\frac{2k-1}{2^n}, 1\big)$, $\big(\frac{k}{2^{n-1}}, 0\big)$ і $\big(1,0\big)$. Крім того, розглянемо функції $\varphi_0(y) = 1 - y$ і $\varphi_1(y) = y$. Перенумеруємо усі двійково-раціональні числа з відрізка [0,1] за їх рангами у послідовність

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$$

і позначимо через r_k — k-тий член цієї послідовності. Нехай $g_k = \varphi_{r_{k-1}}$ при $k \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ — це базис у просторі $C_u[0,1]$, який називається *базисом Фабера-Шаудера*.

Два базиси $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ і $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ у банахових просторах X і Y відповідно називаються *еквівалентними*, якщо існує такий ізоморфізм $U : X \to Y$, що $Ux_k = y_k$ для кожного k.

Нам потрібна буде наступна теорема про близькі базиси [11, с.5].

Теорема 5. *Нехай $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ — нормований базис у банаховому просторі X з базисною константою K і $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ — послідовність векторів з X, для якої $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k - y_k\| < \frac{1}{2K}$. Тоді і $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ — це базис в X, який є еквівалентним базису $(x_k)_{k=1}^{\infty}$.*

Повне розв'язання проблеми $Ш_{uu}$ (а значить і $Ш_{up}$) у просторі $C[0,1]$ дає наступна теорема.

Теорема 6. *Кожен всюди щільний в $C_u[0,1]$ лінійний підпростір L є uu-простором.*

Доведення. Нехай $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ — базис Фабера-Шаудера в $C_u[0,1]$, а K — його базисна константа. Розглянемо лінійний підпростір M простору $C[0,1]$, що складається з усіх неперервних кусково-лінійних функцій. Зрозуміло, що $g_k \in M$ для кожного k. Кожна функція $g \in C[0,1]$ єдиним чином зображається у вигляді

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) g_k,$$

де ряд збігається у просторі $C_u[0,1]$. Лінійні функціонали $c_k : C_u[0,1] \to \mathbb{R}$, як добре відомо [11, с.7], є неперервними (навіть p-неперервними [14, с.32]), а тому оператори

$$S_n g = \sum_{k=1}^{n} c_k(g) g_k$$

є uu-неперервними (і навіть pu-неперервними), причому $imS_n \subseteq M$ і $S_n g \to g$ в $C_u[0,1]$.

Нехай L — всюди щільний лінійний підпростір простору $C_u[0,1]$. Для кожного номера k існує така функція $h_k \in L$, що

$$\|g_k - h_k\| < \frac{1}{2^{k+1}K}.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k - h_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}K} = \frac{1}{2K}.$$

Тому за теоремою 5 послідовність $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ — це базис в $C_u[0,1]$, який є еквівалентним базису $(g_k)_{k=1}^{\infty}$. В такому разі існує ізоморфізм $U : C_u[0,1] \to C_u[0,1]$ такий, що $Ug_k = h_k$ для кожного k.

Для кожного n покладемо

$$A_n = US_nU^{-1}.$$

Ясно, що оператори A_n є *uu*-неперервними, бо U, S_n і U^{-1} є такими. Нехай $h \in C[0,1]$ і $g = U^{-1}h$. Тоді

$$A_n h = US_n g = U\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k(g)g_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k(g)Ug_k = \sum_{k=1}^{n} c_k(g)h_k \in L.$$

Таким чином, $A_n(C[0,1]) \subseteq L$ для кожного n. Крім того,

$$A_n h = US_n g \to Ug = h.$$

Отже, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — це *uu*-апроксимуюча послідовність для L. □

Ми не знаємо відповіді на таке питання:

***Проблема** V.* Чи є серед всюди щільних лінійних підпросторів L простору $C_u[0,1]$ такі, що не є *apu*-просторами? *app*-просторами?

9. Таким самим способом легко встановлюється загальніший результат, в якому термін базис означає базис Шаудера.

Теорема 7. *Нехай Y — такий компактний простір, що простір $C_u(Y)$ має базис і L – всюди щільний лінійний підпростір $C_u(Y)$. Тоді L — це auu-простір.*

Таким чином, відомо ([11, с.4], [9, 13]), що простір $C_u[0,1]^n$ має базис. Більше того [14, теорема 4.4.13], для довільного метризовного компакта Y простір $C_u(Y)$ має базис. Чи є базис у кожного сепарабельного простору $C_u(Y)$ ми не знаємо.

З теореми 7 негайно випливає наступна теорема.

Теорема 8. *Нехай Y — такий компактний простір, що простір $C_u(Y)$ має базис, L — всюди щільний лінійний підпростір $C_u(Y)$, X — топологічний простір і $f \in C(X \times Y)$. Тоді існує така послідовність сукупно неперервних CL-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $f_n^x \to f^x$ в $C_u(Y)$ для кожного $x \in X$.*

Більше того, поняття *auu*-простору можна ввести і в довільному нормованому просторі. Справді, нехай E — нормований простір і L — його всюди щільний підпростір. Такий підпростір L ми назвемо *апроксимаційним*, якщо існує послідовність неперервних операторів $A_n : E \to L$ така, що $A_n g \to g$ в E для кожного $g \in E$. Застосовуючи теорему про близькі базиси, так само, як в теоремі 5, отримуємо такий результат.

Теорема 9. *Нехай E — банаховий простір з базисом і L — всюди щільний лінійний підпростір E. Тоді L є апроксимаційним підпростором E.*

10. На завершення сформулюємо загальну проблему, яка охоплює частину розглянутих тут задач.

Нехай $(E, \mathcal{T})$ — топологічний простір E з топологією $\mathcal{T}$. Його підпростір L назвемо *секвенціально всюди щільним*, якщо для кожної точки $g \in E$ існує така послідовність точок $g_n \in L$, що $g_n \to g$ в E. Припустимо, що на E задана ще одна топологія $\mathcal{S}$.

Для топологічного простору X через $C_{\mathcal{S}}(X,E)$ позначимо сукупність всіх неперервних відображень $\varphi : X \to (E,\mathcal{S})$.

Проблема VI**.** Нехай L — секвенціально всюди щільний підпростір топологічного простору $(E,\mathcal{T})$, $\mathcal{S}$ — топологія на E і X — топологічний простір. За яких умов для кожного відображення $\varphi \in C_{\mathcal{S}}(X,E)$ існує послідовність відображень $\varphi_n \in C_{\mathcal{S}}(X,E)$ така, що $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $(E,\mathcal{T})$ для кожного $x \in X$?

Література

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2007.– Вип. 336-337. – С. 52–59.

2. Волошин Г.А. Про еквівалентність двох апроксимаційних властивостей підпросторів простору неперервних функцій // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу", присв. 70-річчю каф. мат. аналізу Чернів. ун-ту. 30 вересня – 3 жовтня, 2010, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці: Книги - XXI, 2010. – С.53–55.

3. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *До питання про узагальнення однієї теореми Бернштейна* // FM 2009 Conference "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III" dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk (1919-1998). August 22-26, 2009. Abstracts. – Kuiv. – 2009. – C.106–107.

4. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Наближення нарізно неперервних функцій,* 2π*-періодичних відносно другої змінної* // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25-28 березня, 2010. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т. – 2010. – С. 27–28.

5. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і теорія наближень* www.imath.kiev.ua/∼congress2009/Abstracts/Masluchenko.html

6. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. *Про наближення нарізно неперервних функцій,* 2π*-періодичних відносно другої змінної* // Карпат. мат. публ. – 2010. – Т.2, №1. –С. 4–14.

7. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *Наближення нарізно і сукупно неперервних функцій* // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25-28 березня, 2010. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, 2010. – С. 2–3.

8. Маслюченко В.К. Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

9. Ciesielski Z., Domsta J. *Consttuction of an orthonormal basis in* $C^m(I^d)$ *and* $W_p^m(I^d)$, Studia Math., **41**(1972), 211–224.

10. Lebesque H. *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sci. Math., **22** (1898), 278–287.

11. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence spaces, Berlin, Heideberg, New-York: Springer-Verlag, 1977. – 188p.

12. Maslyuchenko V., Voloshyn H. *On Approximation of the separately continuous and continuously holomorphic functions* // International conference "Analytic methods of mechanics and complex analysis" dedicated to N. A. Kilchevskii and V.A. Zmorovich, 29 June - 5 July, 2009. Abstracts, Kiev, 2010, 59–60.

13. Schonefeld S. *Schauder bases in the Banach spaces* $C^k(T^q)$, Trans. Amer. Math. Soc., **165** (1972), 309–318.

14. Semadeni Z. Schauder bases in Banach spaces of continuous functions, Berlin, Heideberg, New-York: Springer-Verlag, 1982. – 136p.

15. Tsuji M. *On Bair's Theorem concerning a function $f(x, y)$ which is continuous with respect to each variable x and y*, J. Math. Soc. Japan, **2**,3-4 (1951), 210–212.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,

Чернівці, Україна

Надійшло 8.11.2010

Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V. *On approximation of the separately and jointly continuous functions*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 10–20.

We investigate the following problem: which dense subspaces L of the Banach space $C(Y)$ of continuous functions on a compact Y and topological spaces X have such property, that for every separately or jointly continuous functions $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ there exists a sequence of separately or jointly continuous functions $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ such, that $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ for arbitrary $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ and $f_n^x \rightrightarrows f^x$ on Y for every $x \in X$? In particular, it was shown, if the space $C(Y)$ has a basis that every jointly continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ has jointly continuous approximations f_n such type.

Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. *О приближении раздельно и совокупно непрерывных функций* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 10–20.

Исследуется проблема: какие из всюду плотных подпространств L банахового пространства $C(Y)$ непрерывных функций на компакте Y и топологических пространств X обладают тем свойством, что для каждой раздельно или совокупно непрерывной функции $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ существует такая последовательность раздельно или совокупно непрерывных функций $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, что $f_n^x = f_n(x, \cdot) \in L$ для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, и $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для каждого $x \in X$. Показано, что если пространство $C(Y)$ имеет базис, то каждая совокупно непрерывная функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ имеет совокупно непрерывные аппроксимации f_n такого рода.