Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.52

Балан В.А.

ПОБУДОВА РАДІАЛЬНО ОБМЕЖЕНИХ АНТИПРОКСИМІНАЛЬНИХ МНОЖИН В ПРОСТОРІ L_1

Балан В.А. *Побудова радіально обмежених антипроксимінальних множин в просторі* L_1 // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 4–9.

Показано, що в просторі L_1 поляра слабко* збіжної до нуля послідовності містить радіально обмежену абсолютно опуклу антипроксимінальну множину.

Вступ

Відстанню від елемента x в нормованому просторі X до непорожньої множини $M \subseteq X$ називається число $d(x, M) = \|x - M\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$. Елемент $y \in M$ називається *найближчою точкою до* x, якщо $\|x - y\| = d(x, M)$, а множина всіх найближчих елементів до точки x в множині M позначається через $P_M(x)$.

Множина M називається *антипроксимінальною (AP-множиною)*, якщо $P_M(x) = \varnothing$ для довільного $x \in X \setminus M$.

Нехай X^* — спряжений простір до X. Кажуть, що функціонал $f \in X^*$ *досягає максимуму на множині* $M \subseteq X$, якщо існує елемент $x \in M$ такий, що $f(x) = \sup f(M)$. Позначимо $\Sigma(M)$ множину всіх функціоналів, які досягають максимуму на множині M, тобто

$$\Sigma(M) = \{f \in X^* : \exists x \in M \mid f(x) = \sup f(M)\}.$$

У 1972 році М.Едельштейн і А.Томпсон в [5] показали, що антипроксимінальність обмеженої замкненої опуклої підмножини M банахового простору X рівносильна тому, що жоден ненульовий опорний функціонал множини M не досягає норми на замкненій одиничній кулі B, тобто

$$\Sigma(A) \cap \Sigma(B) = \{0\}.$$

В роботах [1-6] вивчалися простори, які містять деяку обмежену замкнену непорожню антипроксимінальну множину. Зокрема, було встановлено, що такими є простори: c_0, c, $c(X)$ (при певних умовах на простір X), L_∞. У зв'язку з цими дослідженнями

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46E30, 46B28.

Ключові слова і фрази: простір L_1, антипроксимінальна множина, радіальна обмеженість.

М. Попов поставив питання: чи містить простір сумовних функцій L_1 деяку обмежену опуклу замкнену антипроксимінальну множину?

Множина M в банаховому просторі X над полем $\mathbb{K}$, $0 \in M$, називається *радіально обмеженою*, якщо для кожного ненульового елемента $x \in X$ множина $\{\alpha \in \mathbb{K} : \alpha x \in M\}$ – обмежена в $\mathbb{K}$.

Зауважимо, що в [2] побудовано приклад опуклої замкненої радіально обмеженої антипроксимінальної множини в просторі $L_1[-1, 1]$.

У даній статті ми узагальнимо підхід з [2] і покажемо, що поляра довільної w^*-збіжної до нуля послідовності функціоналів з L_1^* містить замкнений радіально обмежений абсолютно опуклий антипроксимінальний окіл нуля в L_1.

1 Допоміжні твердження

Спочатку відмітимо, що

$$\Sigma(B_{L_1}) = \{f \in L_\infty : \mu(\{t \in [0, 1] : |f(t)| = \|f\|\}) > 0\},$$

де B_{L_1} — замкнена одинична куля в L_1.

Тут і далі, враховуючи опис спряженого L_1^*, неперервні функціонали на просторі L_1 ми будемо ототожнювати з елементами простору L_∞. А саме, якщо $y \in L_\infty$, то $y(x) = \int\limits_{[0,1]} y(t)x(t)d\mu$ для всіх $x \in L_1$.

Для довільної множини A у лінійному просторі X через $\mathrm{sp}(A)$ ми позначатимемо лінійну оболонку множини A.

Нам будуть потрібні наступні твердження.

Твердження 1.1. *Нехай $(y_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність простих функцій $y_n \in L_\infty$, $(a_n)_{n=1}^\infty$ — довільна послідовність чисел $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $(z_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність функцій $z_n \in L_\infty$, $\tilde{y_n} = y_n + a_n z_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому послідовність $(z_n)_{n=1}^\infty$ задовольняє наступну умову:*

(i) якщо існує така множина $A \subseteq [0, 1]$ з $\mu(A) > 0$, що функція $\sum\limits_{k=1}^n b_k z_k$ — стала на A, то $b_k = 0$ для всіх $1 \le k \le n$.

Тоді $sp\{\tilde{y_n} : n \in \mathbb{N} \ \cap \Sigma(B_{L_1})\} = \{0\}$.

Доведення. Нехай існує функція $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h \in sp\{\tilde{y_n} : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1})$. Оскільки $h \in \Sigma(B_{L_1})$, то множина $A = \{t \in [0, 1] : |h(t)| = \|h\|\}$ така, що $\mu(A) > 0$. Вважатимемо, що $\mu(A^+) > 0$, де $A^+ = \{t \in [0, 1] : h(t) = \|h\|\}$.

З іншого боку, оскільки $h \in sp\{\tilde{y_n} : n \in \mathbb{N}\}$, то $h = \sum\limits_{k=1}^n (\lambda_k y_k + \lambda_k a_k z_k)$.

Тому маємо

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k z_k(t) = \|h\|$$

для всіх $t \in A^+$. Тепер $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k a_k z_k(t) = \|h\| - \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k y_k(t) = g(t)$. Оскільки функція $g(t)$ є простою, то існують таке $c \in \mathbb{R}$ і множина $B \subseteq A^+$ з $\mu(B) > 0$, що $g(t) = c$ для довільного $t \in B$. Тому $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_k z_k = c$ на множині B, звідки, згідно з умовою (i), маємо $\lambda_k a_k = 0$ для кожного $1 \le k \le n$. Врахувавши, що всі $a_k \ne 0$, одержимо, що $\lambda_k = 0$ для всіх $1 \le k \le n$. Тому $h = 0$. $\square$

Зауважимо, що послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ многочленів різних додатних степенів задовольняє умову (i) твердження 1.1, адже многочлен додатного степеня не може бути сталим на нескінченній множині.

Твердження 1.2. *Нехай $X = L_1$, $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ — збіжна до нуля послідовність чисел $\varepsilon_k > 0$, $(x_{nk} : n \in \mathbb{N}, k > n)$ — сім'я елементів $x_{nk} \in X$ таких, що $\|x_{nk}\| \le \varepsilon_k$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $k > n$ і $\varphi : \mathbb{N} \to \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, k > n\}$ — бієкція. Тоді послідовність $z_m = x_{\varphi(m)}$ збігається до нуля в X.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, то існує $k_0 \in \mathbb{N}$, таке що $\varepsilon_k < \varepsilon$ для всіх $k \ge k_0$. Зрозуміло, що множина $A = \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, n < k < k_0\}$ — скінченна. Покладемо $m_0 = \sup \varphi^{-1}(A)$.

Нехай $m > m_0$. Тоді $(n,k) = \varphi(m) \notin A$, тобто $k \ge k_0$. Тому $\|z_m\| = \|x_{nk}\| \le \varepsilon_k < \varepsilon$, а, отже, $\lim\limits_{m\to\infty} \|z_m\| = 0$. $\square$

Для множини A в топологічному просторі X через $\overline{A}$ ми позначатимемо замикання множини A. Через $\mathrm{cc}(A)$ — абсолютно опуклу оболонку множини A у векторному просторі X.

Твердження 1.3. *Нехай $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів $y_n \in L_\infty$, таких що $y_n \xrightarrow{w^*} 0$. Тоді існує послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in L_\infty$, така що $z_n \xrightarrow{w^*} 0$, $\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1}) = \{0\}$ і $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$.*

Доведення. Нехай $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ — послідовність чисел $\varepsilon_k = \frac{1}{4^k}$ і $(m_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \ge n)$ — сім'я різних натуральних чисел. Побудуємо сім'ю $(\tilde{x}_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \ge n)$ простих функцій $\tilde{x}_{nk} \in L_\infty$, таку що сім'я $(x_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \ge n)$ елементів $x_{nk} = \tilde{x}_{nk} + \varepsilon_k \alpha_{nk}$, де $\alpha_{nk}(t) = t^{m_{nk}}$ при $t \in [0,1]$, задовольняє умови:

(i) $\|y_n - \sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni}\| \le 2\varepsilon_k$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k \ge n$,

(ii) $\|x_{nk}\| \le 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}$ при $k > n$.

Зауважимо, що достатньо для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудувати послідовність $(\tilde{x}_{nk})_{k=n}^{\infty}$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Міркуватимемо індукцією відносно $k \ge n$. Виберемо просту функцію $\tilde{x}_{nn} \in L_\infty$, таку що $\|y_n - \tilde{x}_{nn}\| \le \varepsilon_n$. Тоді

$$\|y_n - x_{nn}\| \le \|y_n - \tilde{x}_{nn}\| + \|\tilde{x}_{nn} - x_{nn}\| \le \varepsilon_n + \|\varepsilon_n \alpha_{nn}\| \le 2\varepsilon_n,$$

тобто виконується умова (i) при $k = n$.

Припустимо, що функції $\tilde{x}_{nn}, ..., \tilde{x}_{nk}$ вже побудовані. Побудуємо функцію $\tilde{x}_{nk+1}$. Згідно з умовою (i), маємо $\|\tilde{y}_{nk}\| \le 2\varepsilon_k$, де $\tilde{y}_{nk} = y_n - \sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni}$.

Виберемо просту функцію $\tilde{x}_{nk+1} \in L_\infty$, таку що $\|\tilde{x}_{nk+1}\| \le 2\varepsilon_k$ і $\|\tilde{y}_{nk} - \tilde{x}_{nk+1}\| \le \varepsilon_{k+1}$. Тоді матимемо

$$\|y_n - \sum_{i=n}^{k+1} x_{ni}\| \le \|\tilde{y}_{nk} - \tilde{x}_{nk+1}\| + \|\varepsilon_{k+1}\alpha_{nk+1}\| \le 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1},$$

тобто виконується умова (ii).

Покладемо $u_{nn} = 2x_{nn}$ і $u_{nk} = 2^k x_{nk}$ при $k > n$. Тепер візьмемо бієкцію $\varphi : \mathbb{N} \to \{(n,k) : n \in \mathbb{N}, k \ge n\}$ і покладемо $z_m = u_{\varphi(m)}$.

Множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ розіб'ємо на дві підмножини наступним чином:

$$M_1 = \{\varphi^{-1}(n,n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad M_2 = \mathbb{N} \setminus M_1.$$

Оскільки $y_n \xrightarrow{w^*} 0$ і $\|y_n - x_{nn}\| \le 2\varepsilon_n$, то $x_{nn} \xrightarrow{w^*} 0$, тому і $u_{nn} \xrightarrow{w^*} 0$, а, отже, послідовність $(z_m)_{m \in M_1}$ — w^*-збіжна до нуля. Тепер, оскільки $\|x_{nk}\| \le \frac{1}{4^k} = \varepsilon_k$, то $\|u_{nk}\| \le \frac{1}{2^k}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та всіх $k > n$. Отже, згідно з твердженням 2.2, послідовність $(z_m)_{m \in M_2}$ збігається до нуля за нормою. Тому $z_m \xrightarrow{w^*} 0$ при $m \to \infty$.

Тепер, оскільки $\|y_n - \sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni}\| \le 2\varepsilon_k$, то $y_n = \sum\limits_{k \ge n} x_{nk}$. Врахувавши, що $\sum\limits_{i=n}^{k} x_{ni} = \frac{1}{2}u_{nn} + \sum\limits_{i=n+1}^{k} \frac{1}{2^i} u_{ni} \subseteq \mathrm{cc}\{u_{ni} : i \ge n\} = \mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k > n$, отримаємо, що $y_n \in \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. □

Зауважимо, що оскільки функції $\tilde{x}_{nk}$ — прості і натуральні числа m_{nk} різні, то послідовність функцій x_{nk} задовольняє умову (i) твердження 1.1. Тому цю ж умову задовольняє послідовність $(z_n)_{n=1}^\infty$. Отже, $\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1}) = \{0\}$.

Твердження 1.4. *Нехай X — нормований простір, $(y_n)_{n=1}^\infty$, $(z_n)_{n=1}^\infty$ — послідовності лінійних неперервних функціоналів $y_n, z_n \in X^*$, такі що $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$ і $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |y_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$. Тоді $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |z_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$.*

Доведення. Нехай $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |z_n(x)| = 0$ для деякого $x \in X$, тобто $z_n(x) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що множина $L = \{y \in X^* : y(x) = 0\}$ є w^*-замкненою в X^*. Тому $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} \subseteq L$. Отже, $y_n(x) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, що суперечить умові. □

2 Основний результат

Теорема 1. *Нехай X — нормований простір, B — одинична куля в X, $(y_n)_{n=1}^\infty$ — w^*-збіжна до нуля послідовність функціоналів $y_n \in X^*$, така що $\mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B) = \{0\}$. Тоді множина $M = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}^o$ є AP-множиною.*

Доведення. Покажемо, що $\Sigma(M) \subseteq \mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Нехай $y_0 \ne 0$, $y_0 \in \Sigma(M)$. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\sup\limits_{x \in M} y_0(x) = |\sup\limits_{x \in M} y_0(x)| = 1$. Оскільки $y_0 \in \Sigma(M)$, то існує елемент $x_0 \in M$, такий що $y_0(x_0) = 1$.

Оскільки $|y_0(x)| \le 1$ для всіх $x \in M$, то $y_0 \in M^o = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}^{oo}$. Згідно з теоремою про біполяру, множина $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}^{oo}$ є w^*-замкненою абсолютно опуклою оболонкою множини $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, тобто $y_0 \in \overline{\mathrm{cc}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} = B$.

Покладемо $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : |y_n(x_0)| < \frac{1}{2}\}$ і $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : |y_n(x_0)| \ge \frac{1}{2}\}$. Оскільки $y_n(x_0) \to 0$, то множина N_2 — скінченна. Покладемо $A_1 = \overline{\mathrm{cc}\{y_n : n \in N_1\}}^{w^*}$ і $A_2 = \overline{\mathrm{cc}\{y_n : n \in N_2\}}^{w^*} = \mathrm{cc}\{y_n : n \in N_2\}$.

Позначимо $A = \{\lambda a_1 + \mu a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, |\lambda| + |\mu| \le 1\}$ і покажемо, що $A = \mathrm{cc}(A_1 \cup A_2) = B$.

Зауважимо, що $A \subseteq \mathrm{cc}(A_1 \cup A_2) \subseteq \overline{\mathrm{cc}(A_1 \cup A_2)}^{w^*} = B$. Крім того, оскільки множини A_1 і A_2 — абсолютно опуклі, то і множина A є абсолютно опуклою. Тому $\mathrm{cc}(A_1 \cup A_2) = A$. Залишилось показати, що множина A є w^*-замкненою.

Розглянемо неперервне відображення $\varphi : (X^*, w^*) \times (X^*, w^*) \times \mathbb{R}^2 \to (X^*, w^*)$, яке діє за правилом $\varphi(x, y, (\lambda, \mu)) = \lambda x + \mu y$. Згідно з теоремою Алаоглу-Бурбакі, множини A_1 і A_2 є компактними в (X^*, w^*), а множина $S = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : |\lambda| + |\mu| \le 1\}$ – компактна в $\mathbb{R}^2$. Тому множина $A = \varphi(A_1 \times A_2 \times S)$ є компактною, зокрема w^*-замкненою в X^*.

Таким чином, $y_0 \in A$. Тоді $y_0 = \lambda g_1 + \mu g_2$, де $g_1 \in A_1,\ g_2 \in A_2,\ |\lambda| + |\mu| \le 1$. Оскільки $|g(x_0)| \le \frac{1}{2}$ для всіх $g \in A_1$ і $|g(x_0)| \le 1$ для всіх $g \in A_2$, то $|g_1(x_0)| \le \frac{1}{2}$ і $|g_2(x_0)| \le 1$. Покажемо, що $\lambda = 0$. Маємо $1 = |y_0(x_0)| = |\lambda g_1(x_0) + \mu g_2(x_0)| \le |\lambda||g_1(x_0)| + |\mu||g_2(x_0)| \le |\lambda| \cdot \frac{1}{2} + |\mu| \cdot 1 \le 1 - \frac{|\lambda|}{2}$. Отже, $\lambda = 0$ і $y_0 \in A_2 = \mathrm{cc}\{y_n : n \in N_2\} \subseteq \mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Тепер, оскільки $\mathrm{sp}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B) = \{0\}$, то $\Sigma(M) \cap \Sigma(B) = \{0\}$, а, отже, M — AP-множина. □

Теорема 2. *Нехай $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — w^*-збіжна до нуля послідовність функцій $y_n \in L_\infty$. Тоді існує сепарабельна множина $B \in L_\infty$, така що множина $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B$ і множина $M = B^o$ є AP-множиною в L_1. Зокрема, якщо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |y_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$, то множина M є радіально обмеженою.*

Доведення. Згідно з твердженням 1.3 існує послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $z_n \in L_\infty$, така що $z_n \xrightarrow{w^*} 0$, $\mathrm{sp}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \Sigma(B_{L_1}) = \{0\}$ і $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$. Покладемо $B = \overline{\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*}$. Зауважимо, що $M = B^o = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}^{ooo} = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}^o$. Тоді, згідно з теоремою 1 множина M є AP-множиною в L_1.

Покажемо, що M є радіально обмеженою. Спочатку зауважимо, що радіальна обмеженість множини $\mathrm{cc}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}^o$ рівносильна тому, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$. Тепер, оскільки $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |y_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$, то згідно з твердженням 1.4 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n(x)| > 0$ для всіх $x \in X$. □

Наступне твердження показує, що, використовуючи описану вище конструкцію, одержати обмежену AP-множину M в просторі L_1 не можна, адже простір L_1 не можна ізоморфно вкласти в простір c_0.

Твердження 2.1. *Нехай X – банахів простір, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — w^*-збіжна до нуля послідовність функцій $y_n \in X^*$ і $M = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}^o$. Тоді, якщо M — обмежена, то X ізоморфно вкладається в c_0.*

Доведення. Означимо оператор $T : X \to c_0$ наступним чином

$$X \ni x \xrightarrow{T} (y_1(x), y_2(x), ...) = Tx.$$

Оскільки $y_n \xrightarrow{w^*} 0$, то $y_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для всіх $x \in X$, а, отже, $Tx \in c_0$ для всіх $x \in X$.

Зрозуміло, що оператор T — лінійний. Покажемо, що оператор T — неперервний. Зауважимо, що згідно з принципом рівномірної обмеженості послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — обмежена за нормою. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\|y_n\| \le 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо $x \in X$. Тоді $\|Tx\|_{c_0} = \|(y_1(x), y_2(x), ...)\|_{c_0} = \sup\limits_n |y_n(x)| \le \sup\limits_n \|y_n\| \cdot \|x\| \le \|x\|$. Отже, $\|T\| \le 1$ і оператор T — неперервний.

Нехай $C > 0$ таке, що $\|x\| \le C$ для кожного $x \in M = \{z \in X : \sup\limits_n |y_n(z)| \le 1\} = \{z \in X : \|Tz\|_{c_0} \le 1\}$. Тому $\|Tz\|_{c_0} \ge \frac{1}{C}\|z\|$ для кожного $z \in X$, тобто T – обмежений знизу. Отже, T – ізоморфне вкладення. □

Література

1. Фонф В.П. *Об антипроксиминальных множествах в пространствах непрерывных функций на бикомпактах* // Мат. заметки. – 1983. – Т.33, №4. – С. 549–558.

2. Balaganskii V.S. *Antiproximinal sets in the space of continuous functions*, Math. Notes, **60**, 5 (1996), 485–494.

3. Cobzaş S. *Antiproximinal sets in the Banach space* $c(X)$, Comment. Math. Univ. Carolinae, **38**, 2 (1997), 247–253.

4. Cobzaş S. *Antiproximinal sets in the spaces* c_0 *and* c, Math. Notes, **17** (1975), 449–457.

5. Edelstein M., Thompson A.C. *Some results on nearest points and support properties of convex sets in* c_0, Pacific J. Math., **40** (1972), 553–560.

6. Klee V. *Remarks on nearest points in normed linear spaces*, Proc. Colloquium on Convexity, Copenhagen, (1965), 168–176.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,

Чернівці, Україна

Надійшло 20.09.2010

Balan V.A. *Construction of radially bounded antiproximinal sets in* L_1, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 4–9.

It is shown that in L_1 space the polar of the weakly* convergent sequence contains radially bounded completely convex set.

Балан В.А. *Построение радиально ограниченных антипроксиминальных множеств в пространстве* L_1 // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 4–9.

Показано, что в пространстве L_1 поляра слабо* сходящейся к нулю последовательности содержит радиально ограниченное абсолютно выпуклое множество.