ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 63–69 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.63–69
doi:10.15330/cmp.5.1.63-69

Ладзоришин Н.Б.

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР МАТРИЦЬ, ВИЗНАЧНИКИ ЯКИХ Є СТЕПЕНЯМИ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ, НАД КВАДРАТИЧНИМИ ЕВКЛІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

Встановлено, що пара матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ спільними рядковими елементарними операціями над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і різними стовпцевими елементарними операціями над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$ зводиться до трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях.

Ключові слова і фрази: квадратичне евклідове кільце, еквівалентність пар матриць.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Вступ

Поняття напівскалярної еквівалентності було введено П.С. Казімірським і В.М. Петричковичем в 1977 році [4]. Вони встановили, що многочленна матриця неособлива або повного рангу над алгебраїчно замкнутим полем характеристики нуль напівскалярно-еквівалентна до трикутної матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі. Схожий результат щодо напівскалярної еквівалентності неособливих многочленних матриць пізніше формулюють J.A. Dias da Silva і T.J. Laffey у 1999 році [1]. В роботі [8] встановлено аналог цієї еквівалентності для матриць над евклідовими квадратичними кільцями та доведено, що кожна матриця над цим кільцем за допомогою таких еквівалентних перетворень зводиться до трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі. Еквівалентність пар матриць лише зі спільною односторонньою перетворювальною матрицею досліджували V. Dlab і C.M. Ringel [2]. Вони розглянули еквівалентність пар комплексних матриць A_1, A_2, яку схематично можна зобразити у вигляді QA_1P_1, QA_2P_2, де Q — комплексна, P_1, P_2 — дійсні оборотні матриці і встановили канонічну форму щодо таких перетворень. В.В. Сергейчук і Т.Н. Гайдук запропонували канонічну форму A_{gen}, B_{gen} для пари матриць A, B над полем стосовно спільних рядкових і різних стовпцевих перетворень [3]. У роботі [7] П.С. Казімірський і Б.В. Забавський довели, що пара матриць над адекватним кільцем, одна з яких неособлива, спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями зводиться до трикутного вигляду з інваріантними множниками на головних діагоналях.

УДК 512.64
2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A21.

У цій роботі доведено, що пара матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичним евклідовим кільцем за допомогою спільних елементарних операцій із кільця $\mathbb{Z}$ над рядками і різних елементарних операцій із кільця $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ над стовпцями зводиться до трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях.

1 Квадратичні евклідові кільця

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат жодного простого числа. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ — квадратичне кільце [6]. Якщо $k \equiv 2, 3(\mathrm{mod} 4)$, тоді $\mathbb{K}$ складається з елементів вигляду $x + y\sqrt{k}$, де $x, y \in \mathbb{Z}$; якщо $k \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$, тоді елементи кільця мають вигляд $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}$, де $x, y \in \mathbb{Z}$ і $x - y$ ділиться на 2.

При $k < 0$ квадратичне кільце називається уявним, а при $k > 0$ — дійсним. Відомо п'ять уявних і сімнадцять дійсних квадратичних кілець, які є евклідовими. В цих кільцях евклідова норма визначається наступним чином:

$$\text{для } k < 0 \qquad e(x + y\sqrt{k}) = x^2 - ky^2; \qquad e\Big(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}\Big) = \frac{1}{4}(x^2 - ky^2),$$

$$\text{для } k > 0 \qquad e(x + y\sqrt{k}) = |x^2 - ky^2|; \qquad e\Big(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{k}\Big) = \frac{1}{4}|x^2 - ky^2|.$$

Евклідові норми простих чисел в квадратичному евклідовому кільці є простими раціональними числами або квадратами простих раціональних чисел. Кожне евклідове квадратичне кільце є кільцем головних ідеалів. Однак відомо, що квадратичне кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ є кільцем головних ідеалів, але не є евклідовим. Існують квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів, наприклад, кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

2 Еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями

Надалі $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ — евклідове квадратичне кільце. Через $M(m, n, \mathbb{K})$ позначимо множину $m \times n$ матриць над кільцем $\mathbb{K}$, а через $M(n, \mathbb{K})$ — множину квадратних матриць n-го порядку, d_k^A — найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці A.

Лема 2.1. *Нехай $A \in M(2, n, \mathbb{K})$, $n \geq 2$ і $d_2^A = p^r$, де p — просте число з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\|x_1 \quad x_2\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\|x_1 \quad x_2\|\, A = \|a'_{11} \quad \dots \quad a'_{1n}\|\,,$$

де $(a'_{11}, ..., a'_{1n}) = d_1^A$.

Доведення. Нехай
$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{Vmatrix}.$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що $d_1^A = 1$. Тоді правими елементарними перетвореннями над $\mathbb{K}$ матрицю A зводимо до трикутного вигляду

$$AV = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} = A_1,$$

де $V \in GL(n, \mathbb{K})$. Оскільки $\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \right\| A_1 = \left\| \begin{matrix} x_1a_1 + x_2a_3 & x_2a_2 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|$, тоді потрібно довести, що існують такі елементи $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$(x_1a_1 + x_2a_3, x_2a_2) = 1. \tag{1}$$

В матриці A найбільший спільний дільник мінорів другого порядку $d_2^A = p^r$. Отже, $a_1a_2 = p^r$, де $a_1 = p^{r_1}$, $a_2 = p^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$, $r_1, r_2 \geq 0$. Тоді умова (1) виконується при наступних $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$:

1) $p \nmid x_2$ $(p$ не ділить $x_2)$, якщо $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$.

Зауважимо, що якщо $p = p_1 + p_2\sqrt{k}$, то $(p_1 + p_2\sqrt{k})(p_1 - p_2\sqrt{k}) = \alpha$, де $\alpha \in \mathbb{Z}$, α ділиться на p.

2) $p \mid x_2$ $(p$ ділить $x_2)$ і $p \nmid x_1$, якщо $r_1 = 0$, $r_2 > 0$.

Лему доведено. □

Лема 2.2. *Нехай $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $m \leq n$ і $d_m^A = p^r$, де p — просте число з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \end{matrix} \right\|$, де $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\mathbf{x}A = \left\| \begin{matrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

де $(a'_{11}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A$.

Доведення. Нехай $A = \left\| a_{ij} \right\|_1^{m,n}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Доведення проведемо методом математичної індукції за m. Для $m = 2$ твердження справедливе за лемою 2.1. Припустимо, що лема справедлива для $m - 1$. Тобто для матриці

$$A_{m-1} = \left\| \begin{matrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

існує рядок $\left\| \begin{matrix} t_2 & \dots & t_m \end{matrix} \right\|$, де $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, \dots, m$ такий, що

$$\left\| \begin{matrix} t_2 & \dots & t_m \end{matrix} \right\| A_{m-1} = \left\| \begin{matrix} a'_{21} & \dots & a'_{2n} \end{matrix} \right\|,$$

де $(a'_{21}, \dots, a'_{2n}) = d_1^{A_{m-1}}$ і $a'_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij}$, $j = 1, \dots, n$.

Доведемо лему для довільного m. Розглянемо матрицю

$$\tilde{A}_1 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2n} \end{matrix} \right\|.$$

На основі леми 2.1 існує рядок $\left\| \begin{matrix} x & y \end{matrix} \right\|$ такий, що

$$\left\| \begin{matrix} x & y \end{matrix} \right\| \tilde{A}_1 = \left\| \begin{matrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \end{matrix} \right\|,$$

де

$$a'_{1j} = xa_{1j} + ya'_{2j} = xa_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij},$$

$j = 1, \dots, n$, і $(a'_{11}, \dots, a'_{1n}) = d_1^A$, тобто виконується умова (2). Звідси одержимо, що шуканим рядком є рядок $\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 & \dots & x_m \end{matrix} \right\|$, де $x_1 = x$, $x_i = yt_i$, $i = 2, \dots, m$. Лему доведено. □

Теорема 1. *Нехай* $A \in M(n,\mathbb{K})$ *і* $det A = p^r$, *де* p *— просте число з* $\mathbb{K}$. *Тоді існують оборотні матриці* $Q \in GL(n,\mathbb{Z})$ *і* $R \in GL(n,\mathbb{K})$ *такі, що*

$$QAR = \begin{Vmatrix} p^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & p^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & p^{r_n} \end{Vmatrix} = T^A, \tag{3}$$

де $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$ *і* $e(\tilde{a}_{ij}) < e(p^{r_i})$, $e(\tilde{a}_{ij})$ *— евклідова норма числа* $\tilde{a}_{ij}$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^n$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i,j = 1,\ldots,n$. На основі леми 2.2 існує рядок $\mathbf{x} = \|x_1 \;\; \ldots \;\; x_n\|$, $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{Z}$ такий, що $\mathbf{x}A = \|a_{11}' \;\; \ldots \;\; a_{1n}'\|$, де $(a_{11}',\ldots,a_{1n}') = d_1^A$.

Відомо [5], що унімодулярний рядок $\mathbf{x}$ доповнюється до оборотної матриці

$$Q = \begin{Vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ & * & \end{Vmatrix},$$

де $*$ — деякі елементи матриці.

Тоді $QA = \begin{Vmatrix} a_{11}' & \ldots & a_{1n}' \\ & * & \end{Vmatrix} = A_1$, де $(a_{11}',\ldots,a_{1n}') = d_1^A$. Існує матриця $R_1 \in GL(n,K)$ така, що

$$A_1R_1 = QAR_1 = \left\Vert \begin{array}{c|c} p^{r_1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21} & \\ \vdots & \tilde{A}_{n-1} \\ \tilde{a}_{n1} & \end{array} \right\Vert,$$

де $p^{r_1} = d_1^{A_1} = d_1^A$ і $\tilde{A}_{n-1}$ – матриця порядку $n-1$. Зауважимо, що p^{r_1} ділить $\tilde{a}_{i1}$, $i = 2,\ldots,n$ і всі елементи матриці $\tilde{A}_{n-1}$. Отже p^{r_1} є першим інваріантним множником матриці A.

Проводимо аналогічні міркування з матрицею $\tilde{A}_{n-1}$ і через скінченну кількість кроків за допомогою зазначених вище елементарних операцій зведемо матрицю A до вигляду (3). Теорему доведено. □

3 Еквівалентність пар матриць над квадратичними евклідовими кільцями

Лема 3.1. *Нехай* $A, B \in M(2,n,\mathbb{K})$, $n \ge 2$ *і* $d_2^A = p^r$, $d_2^B = q^s$, *де* p, q *— прості числа з* $\mathbb{K}$. *Тоді існує рядок* $\|x_1 \;\; x_2\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ *такий, що*

$$\|x_1 \;\; x_2\|\, A = \|a_{11}' \;\; \ldots \;\; a_{1n}'\|, \qquad \|x_1 \;\; x_2\|\, B = \|b_{11}' \;\; \ldots \;\; b_{1n}'\|, \tag{4}$$

де $(a_{11}',...,a_{1n}') = d_1^A$, $(b_{11}',...,b_{1n}') = d_1^B$.

Доведення. Нехай $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \end{Vmatrix}$. Без обмеження загальності, будемо вважати, що $d_1^A = 1$ і $d_1^B = 1$. За теоремою 1 існують матриці $\tilde{Q} \in GL(2,\mathbb{Z})$ і $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in GL(n,\mathbb{K})$ такі, що

$$\tilde{Q}A\tilde{R}_1 = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = A', \qquad \tilde{Q}B\tilde{R}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b & q^s & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} = B',$$

де $a_1 a_2 = p^r$.

Тепер необхідно довести, що існує такий рядок $\|x_1 \quad x_2\|$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що

$$\|x_1 \quad x_2\| \, A' = \|x_1 a_1 + x_2 a_3 \quad x_2 a_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0\|,$$

$$\|x_1 \quad x_2\| \, B' = \|x_1 + x_2 b \quad x_2 q^s \quad 0 \quad \dots \quad 0\|,$$

де

$$(x_1 a_1 + x_2 a_3, x_2 a_2) = 1 \tag{5}$$

і

$$(x_1 + x_2 b, x_2 q^s) = 1. \tag{6}$$

Оскільки $a_1 a_2 = p^r$, тоді $a_1 = p^{r_1}$, $a_2 = p^{r_2}$, $r_1, r_2 \geq 0$. За лемою 2.1 існують такі $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, що виконується умова (5). Безпосередньо перевіряється, що умови (5), (6) виконуються при наступних $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) = 1$:

1) $p,\ q \nmid x_2$, і $q \mid x_1$, якщо $q \nmid b$; $q \nmid x_1$, якщо $q \mid b$; якщо $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$.

2) $p,\ q \mid x_2$, і $p,\ q \nmid x_1$, якщо $r_1 = 0$, $r_2 > 0$;

3) якщо $r_1 = r_2 = r = 0$, то доведення випливає з леми 2.1.

Отже, для матриць A і B існує такий рядок $\|x_1 \quad x_2\|$, що виконується умова (4). Лему доведено. □

Лема 3.2. *Нехай $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$, $m \leq n$ і $d_m^A = p^r$, $d_m^B = q^s$, де p, q — прості числа з $\mathbb{K}$. Тоді існує рядок $\boldsymbol{x} = \|x_1 \quad \dots \quad x_m\|$, $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Z}$ такий, що*

$$\boldsymbol{x}A = \|\acute{a}_{11} \quad \dots \quad \acute{a}_{1n}\|, \qquad \boldsymbol{x}B = \|\acute{b}_{11} \quad \dots \quad \acute{b}_{1n}\|, \tag{7}$$

де $(\acute{a}_{11}, \dots, \acute{a}_{1n}) = d_1^A$, $(\acute{b}_{11}, \dots, \acute{b}_{1n}) = d_1^B$.

Доведення. Нехай $A = \|a_{ij}\|_1^{m,n}$, $B = \|b_{ij}\|_1^{m,n}$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Доведемо лему методом математичної індукції за m. Для $m = 2$ справедливість твердження випливає з леми 3.1.

Припустимо, що лема справедлива для $m-1$. Тобто для матриць

$$A_{m-1} = \begin{Vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad B_{m-1} = \begin{Vmatrix} b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

існує рядок $\|t_2 \quad \dots \quad t_m\|$, де $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 2, \dots, m$ такий, що

$$\|t_2 \quad \dots \quad t_m\| \, A_{m-1} = \|\acute{a}_{21} \quad \dots \quad \acute{a}_{2n}\| \quad \text{і} \quad \|t_2 \quad \dots \quad t_m\| \, B_{m-1} = \|\acute{b}_{21} \quad \dots \quad \acute{b}_{2n}\|,$$

де

$$(\acute{a}_{21}, \dots, \acute{a}_{2n}) = d_1^{A_{m-1}}, \qquad (\acute{b}_{21}, \dots, \acute{b}_{2n}) = d_1^{B_{m-1}}$$

і

$$\acute{a}_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij}, \qquad \acute{b}_{2j} = \sum_{i=2}^{m} t_i b_{ij}, \ \ j = 1, \dots, n.$$

Доведемо лему для довільного m. Розглянемо матриці:

$$\tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}' & \dots & a_{2n}' \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21}' & \dots & b_{2n}' \end{Vmatrix}.$$

На основі леми 3.1 існує такий рядок $\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix}$, що

$$\begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \tilde{A}_1 = \begin{Vmatrix} a_{11}' & \dots & a_{1n}' \end{Vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{Vmatrix} x & y \end{Vmatrix} \tilde{B}_1 = \begin{Vmatrix} b_{11}' & \dots & b_{1n}' \end{Vmatrix},$$

де $(a_{11}', \dots, a_{1n}') = d_1^A$, $(b_{11}', \dots, b_{1n}') = d_1^B$ і

$$a_{1j}' = xa_{1j} + ya_{2j}' = xa_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i a_{ij},$$

$$b_{1j}' = xb_{1j} + yb_{2j}' = xb_{1j} + y\sum_{i=2}^{m} t_i b_{ij},\ j = 1, \dots, n.$$

Звідси одержимо, що шуканим рядком є рядок $\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{Vmatrix}$, де $x_1 = x$, $x_i = yt_i$, $i = 2, \dots, m$, який задовольняє умову (7). Лему доведено. □

Теорема 2. *Нехай $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ і $\det A = p^r$, $\det B = q^s$, де p, q — прості числа з $\mathbb{K}$. Тоді існують матриці $Q \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $R_1, R_2 \in GL(n, \mathbb{K})$ такі, що*

$$QAR_1 = \begin{Vmatrix} p^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & p^{r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & p^{r_n} \end{Vmatrix} = T^A, \qquad QBR_2 = \begin{Vmatrix} q^{s_1} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{b}_{21} & q^{s_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2}q^{s_2} & \dots & q^{s_n} \end{Vmatrix} = T^B, \tag{8}$$

де $r_1 \le r_2 \le \dots \le r_n$ і $e(\tilde{a}_{ij}) < e(p^{r_i})$; $s_1 \le s_2 \le \dots \le s_n$ і $e(\tilde{b}_{ij}) < e(q^{s_i})$; $i, j = 1, \dots, n$.

Доведення. Нехай $A = \begin{Vmatrix} a_{ij} \end{Vmatrix}_1^{m,n}$, $B = \begin{Vmatrix} b_{ij} \end{Vmatrix}_1^{m,n}$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. На основі леми 3.2 існує рядок $\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{Vmatrix}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ такий, що

$$\mathbf{x}A = \begin{Vmatrix} a_{11}' & \dots & a_{1n}' \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{x}B = \begin{Vmatrix} b_{11}' & \dots & b_{1n}' \end{Vmatrix},$$

де $(a_{11}', \dots, a_{1n}') = d_1^A$ і $(b_{11}', \dots, b_{1n}') = d_1^B$. Рядок $\mathbf{x}$ можна доповнити до оборотної матриці $Q = \begin{Vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ & * & \end{Vmatrix}$. Таким чином,

$$QA = \begin{Vmatrix} a_{11}' & \dots & a_{1n}' \\ & * & \end{Vmatrix} = A_1 \quad \text{i} \quad QB = \begin{Vmatrix} b_{11}' & \dots & b_{1n}' \\ & * & \end{Vmatrix} = B_1.$$

Тоді існують матриці $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in GL(n, K)$ такі, що

$$A_1\tilde{R}_1 = QA\tilde{R}_1 = \left\Vert \begin{array}{c|c} p^{r_1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{a}_{21} & \\ \vdots & \tilde{A}_{n-1} \\ \tilde{a}_{n1} & \end{array} \right\Vert, \qquad B_1\tilde{R}_2 = QB\tilde{R}_2 = \left\Vert \begin{array}{c|c} q^{s_1} & \mathbf{0} \\ \hline \tilde{b}_{21} & \\ \vdots & \tilde{B}_{n-1} \\ \tilde{b}_{n1} & \end{array} \right\Vert,$$

де $d_1^{A_1} = d_1^A = p^{r_1}$, $d_1^{B_1} = d_1^B = q^{s_1}$ і $\tilde{A}_{n-1}$, $\tilde{B}_{n-1}$ — матриці порядків $n-1$. Зауважимо, що p^{r_1} ділить $\tilde{a}_{i1}$, $i = 2, \dots, n$ і ділить всі елементи матриці $\tilde{A}_{n-1}$; q^{s_1} ділить $\tilde{b}_{i1}$, $i = 2, \dots, n$ і всі елементи матриці $\tilde{B}_{n-1}$. Таким чином p^{r_1} і q^{s_1} є першими інваріантними множниками матриць A_1 і B_1, і, отже, матриць A і B.

Застосовуємо аналогічні міркування до матриць $\tilde{A}_{n-1}$ і $\tilde{B}_{n-1}$. Продовжуючи цей процес, через скінченну кількість кроків за допомогою вказаних елементарних операцій зведемо матриці A і B до вигляду (8). Теорему доведено. □

References

[1] Dias da Silva J.A., Laffey T. J. *On simultaneous similarity of matrices and related questions*. Linear Algebra Appl. 1999, **291**, 167–184.

[2] Dlab V., Ringel C.M. *Canonical forms of pairs of complex matrices*. Linear Algebra Appl. 1991, **147**, 387–410.

[3] Gaiduk T.N., Sergeichuk V.V. *Generic canonical form of pairs of matrices with zeros*. Linear Algebra Appl. 2004, **380**, 241–251.

[4] Kazimirs'kii P.S., Petrychkovych V.M. Equivalence of polynomial matrices. In: Theoretical and Applied Problems of Algebra and Differential Equations. Naukova Dumka, Kiev, 1977, 61–66. (in Ukrainian)

[5] Newman M. Integral matrices. Academic Press, New York, 1972.

[6] Rodosskii K.A. The Euclidean algorithm. Nauka, Moscow, 1988. (in Russian)

[7] Zabavskii B.V., Kazimirs'kii P.S. *Reduction of a pair of matrices over an adequate ring to a special triangular form by means of the same one-sided transformations*. Ukr. Math. J. 1984, **36** (2), 233–235. (in Russian)

[8] Zelisko V.R., Ladzoryshyn N.B., Petrychkovych V.M. *On equivalence of matrices over quadratic euclidean rings*. Appl. Problems of Mechanics and Math. 2006, **4**, 16–21. (in Ukrainian)

Надійшло 04.07.2012

Ladzoryshyn N.B. *On equivalence of pairs of matrices, which determinants are primes powers, over quadratic Euclidean rings*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 63–69.

We establish that a pair of matrices, which determinants are primes powers, can be reduced over quadratic Euclidean ring $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ to their triangular forms with invariant factors on a main diagonal by using the common transformation of rows over a ring of rational integers $\mathbb{Z}$ and separate transformations of columns over a quadratic ring $\mathbb{K}$.

Key words and phrases: quadratic Euclidean ring, equivalence of pairs of matrices.

Ладзоришин Н.Б. *Об эквивалентности пар матриц, определители которых являются степенями простых чисел, над квадратичными евклидовымы кольцами* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 63–69.

Установлено, что пара матриц, определители которых являются степенями простых чисел, над квадратичным евклидовым кольцом $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ элементарными преобразованиями над строками над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и различными элементарными преобразованиями над столбцами над квадратичным кольцом $\mathbb{K}$ приводятся к треугольным формам с инвариантными множителями на главных диагоналях.

Ключевые слова и фразы: квадратичное евклидово кольцо, эквивалентность пар матриц.