ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 19–29 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.19–29
doi:10.15330/cmp.5.1.19-29

$\boxed{\text{Васильків Я.В.}}$, Кравець М.Я.

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ПОТЕНЦІАЛІВ ҐРІНА ТА ЇХ СПРЯЖЕНИХ

Встановлено непокращувані оцінки q-тих ($1 \leq q < +\infty$) лебегових інтегральних середніх пари функцій $F = g + i\,\breve{g}$, де g — потенціал Ґріна, а $\breve{g}$ — функція, спряжена до g. Вони узагальнюють відповідні результати Я.В. Васильківа та А.А. Кондратюка для логарифмів $\log B$ добутків Бляшке B в термінах лічильної функції $n(r, 0, B)$ $(0 < r < 1)$ їх нулів.

Ключові слова і фрази: потенціали Ґріна, спряжені функції, лебегові інтегральні середні, розподіл значень субгармонійних функцій.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: marjana_s@ukr.net (Кравець М.Я.)

Вступ

В роботах [8, 9] встановлено непокращувані оцінки лебегових інтегральних середніх $m_q(r, \log B)$, $q \geq 1$, логарифмів добутків Бляшке B в термінах лічильної функції $n(r, 0, B)$ $(0 < r < 1)$ їх нулів і наведено необхідні, а також і достатні умови обмеженості $m_q(r, \log B)$ при $r \nearrow 1$. Мета цієї роботи узагальнити ці результати на пару функцій $F = g + i\breve{g}$, де g — потенціал Ґріна, а $\breve{g}$ — функція спряжена до g. У цьому розділі наведемо необхідні означення та допоміжні твердження.

В роботі [7] введено поняття функції $\breve{u}$, спряженої до субгармонійної функції u в зірковій відносно початку координат області, встановлено зображення та вивчено деякі властивості таких функцій, зокрема, показано, що у випадку коли $u = \log |f|$, $f -$ голоморфна, спряжена до неї функція $\breve{u}$ є деякою гілкою $\operatorname{Arg} f$.

При $z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $t \geq 1$, покладемо

$$l(z, a) = \begin{cases} \int\limits_0^z (\xi - a)^{-1}\, d\xi, & z \neq ta; \\ \log \left| 1 - \dfrac{z}{a} \right| + i\pi, & z = ta. \end{cases}$$

Нагадаємо, що множину $G \subset \mathbb{C}$ називають зірковою множиною відносно початку координат, якщо разом з точкою z вона містить відрізок $[0; z]$. Через $\overset{\circ}{E}$ позначатимемо внутрішність множини E.

Нехай u — субгармонійна в області G функція, $\mu[u]$ — її міра Ріса, $0 \notin \operatorname{supp}\mu[u]$, де $\operatorname{supp}\mu[u]$ — носій цієї міри. За теоремою Ріса про зображення (див., наприклад, [6, с. 123])

УДК 517.574
2010 *Mathematics Subject Classification:* 31A05, 31A20.

для довільної компактної підмножини $K \subset G$ з непорожньою внутрішністю $\overset{\circ}{K}$ і для довільної точки $z \in \overset{\circ}{K}$ виконується

$$u(z) = h_K(z) + \int\limits_K \log\left|1 - \frac{z}{a}\right| d\mu_a[u],$$

де функція h_K гармонійна в $\overset{\circ}{K}$.

Означення 1 ([7]). *Нехай G — зіркова область в $\mathbb{C}$, u — субгармонійна в G функція, $u(0) = 0, 0 \notin \operatorname{supp} \mu[u]$. Спряжена функція $\breve{u}$ до u в G визначається співвідношенням*

$$\breve{u}(z) = \widetilde{h}_K(z) + \int\limits_K \operatorname{Im}(l(z,a))\, d\mu_a[u]$$

де K — компактна підмножина в G із зірковою внутрішністю $\overset{\circ}{K}$, $\widetilde{h}_K$ — гармонійно спряжена до h_K в $\overset{\circ}{K}$ функція, $\widetilde{h}_K(0) = 0$.

Нехай $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$, $0 < R \le +\infty$. Нехай також $u(z)$ — субгармонійна в $\mathbb{D}_R$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$; $\breve{u}(z)$ — спряжена функція до $u(z)$; $F(z) = u(z) + i\,\breve{u}(z)$, $z \in \mathbb{D}_R$. Покладемо ($k \in \mathbb{Z}$, $|z| = r > 0$)

$$n_k(r,u) = \int\limits_{|a|\le r} \left(\frac{\bar{a}}{|a|}\right)^k d\mu_a[u], \qquad n(r,u) = n_0(r,u), \qquad N(r,u) = \int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t}\, dt.$$

Нехай μ — невід'ємна борелева міра в $\mathbb{D}$ така, що $0 \notin \operatorname{supp} \mu$ і $\int\limits_{\mathbb{D}} (1-|a|)\, d\mu_a < +\infty$. Через $G_\mu(z)$ позначатимемо потенціал Ґріна міри μ (див., наприклад, [5, с. 518]):

$$G_\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right| d\mu_a, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Нагадаємо, що $G_\mu(z)$ є субгармонійною в $\mathbb{D}$ функцією. Якщо ж $\mu = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \delta_{a_j}$, де δ_a — міра Дірака, зосереджена в точці a, то $G_\mu = \log|B|$, де B — добуток Бляшке з нулями $Z(B) = \{a_j\}$. Покладемо $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$. Нехай $z \in \mathbb{D}$. Покладемо

$$p_\mu(z) = \int_0^{|z|} \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} \mathcal{P}\left(\bar{z}, t\frac{\bar{a}}{|a|}\right) d\mu_a,$$

$$q_\mu(z) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} \mathcal{P}\left(\frac{\bar{a}}{|a|}, tz\right) d\mu_a + \int_{|z|}^1 \frac{dt}{t} \int_{|a|\le t} \mathcal{P}\left(t\frac{\bar{a}}{|a|}, z\right) d\mu_a,$$

де $\mathcal{P}(w,z) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{w+z}{w-z}\right)$ — ядро Пуассона.

Для функції $f(e^{i\theta}) \in L^1[0;2\pi]$ через $\widetilde{f}(e^{i\theta}) = (H * f)(e^{i\theta})$ позначатимемо згортку періодичного розподілу Гільберта $H = -i \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(k) e^{ik\psi}$, $\psi \in [0;2\pi]$, з функцією f (див., наприклад, [2, т. 2, с. 103]), де $\operatorname{sign} x = \dfrac{x}{|x|}$, при $x \neq 0$ і $\operatorname{sign} 0 = 0$. Тобто

$$c_k(\widetilde{f}) = -i \operatorname{sign}(k) c_k(f), \quad \text{де} \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta}\, d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 1 ([7, 6])**.** *Нехай $F = g + i\breve{g}$. Тоді для кожного фіксованого $r \in (0;1)$*

$$F(re^{i\theta}) = g(re^{i\theta}) + i(\widetilde{g}(re^{i\theta}) - \widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})) = g(re^{i\theta}) - \frac{i}{2}(\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta}) + \widetilde{q}_\mu(re^{i\theta}))$$

для майже всіх $\theta \in [0;2\pi]$.

У розділі 2 істотно використовуються такі теореми. Нехай q і q' спряжені числа, тобто $1/q + 1/q' = 1$.

Теорема 1 ([4])**.** *Якщо $q \in (1;+\infty)$, $f \in L^q[0,2\pi]$, то $\|\widetilde{f}\|_q \le C\,\dfrac{q^2}{q-1}\,\|f\|_q$, де C — деяка додатна стала.*

Теорема 2 ([3])**.** *Нехай $G_\mu(z)$ — потенціал Гріна. Тоді для довільного $q \in [1;+\infty)$ існує така стала $C_1(q)$, що*

$$(1-r)^{1/q'} m_q(r, G_\mu) \le C_1(q) \int_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt, \quad 0 < r < 1.$$

1 Інтегральні середні $m_1(r,F)$.

Зростання інтегрального середнього $m_1(r,F)$ описується такою теоремою.

Теорема 3. 1^0. *Для всіх $r \in (0;1)$ правильна нерівність*

$$m_1(r,F) \le \frac{4}{\pi}\int_0^1 \log\frac{1}{1-t}\frac{n(t,g)}{t}\,dt + 3\int_0^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt.$$

2^0. *Умова*

$$\int_0^1 \log\frac{1}{1-t} n(t,g)\,dt < +\infty \tag{1}$$

достатня для виконання співвідношення

$$\sup_{0<r<1} m_1(r,F) < +\infty. \tag{2}$$

3^0. *Нехай додатня борелева міра μ зосереджена на одному промені. Тоді умова* (1) *є необхідною і достатньою для виконання* (2)*.*

4^0. *Існує потенціал Гріна G_μ такий, що функція $m_1(r,F)$ необмежена на (0;1).*

Доведення. 1^0. Нехай $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$. Тоді

$$m_1(r,g) \le m_1(r,G_\mu) + \int_{\mathbb{D}} \log\frac{1}{|a|}\,d\mu_a \le \int_0^r n(t,g)\frac{dt}{t} + \int_0^1 n(t,g)\frac{dt}{t} \le 2N(1,g). \tag{3}$$

Нерівність $m_1(r,F) \le m_1(r,g) + \frac{1}{2}m_1(r,\widetilde{q_\mu}) + \frac{1}{2}m_1(r,\widetilde{p_\mu})$, $0 < r < 1$, виконується з огляду на зображення функції F (див. лему 1).

На підставі того (див. [4, с. 107, 112]), що

$$\widetilde{\mathcal{P}}(re^{-i\theta}, te^{-i\varphi}) = \frac{2rt\sin(\theta-\varphi)}{r^2 - 2rt\cos(\theta-\varphi) + t^2},$$

одержимо

$$
\begin{aligned}
m_1(r,\widetilde{p}_\mu) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{r} \frac{n(t,g)}{t}\,dt \int\limits_0^{2\pi} \frac{2rt|\sin\theta|d\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2} \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r} \log\frac{r+t}{r-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1} \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{n(xr,g)}{x}\,dx \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1} \log\frac{2}{1-x}\cdot\frac{n(x,g)}{x}\,dx,
\end{aligned} \tag{4}
$$

для $0<r<1$. Аналогічно маємо

$$
m_1(r,\widetilde{q}_\mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{q}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta \le \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{1} \log\frac{1+tr}{1-tr}\,\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int\limits_r^{1} \log\frac{t+r}{t-r}\,\frac{n(t,g)}{t}\,dt\right), \tag{5}
$$

для $0<r<1$. Оцінюючи праву частину нерівності (5) насамперед зауважимо, що

$$
\log\frac{1+tr}{1-tr} \le \log\frac{1+t}{1-t} \le \log\frac{2}{1-t}, \qquad t>0, \quad r<1. \tag{6}
$$

Крім того, оскільки $\frac{r}{x} \le x$ при $\sqrt{r} \le x \le 1$ і $\frac{t+r}{t-r} \le \frac{1+t}{1-t}$ при $\sqrt{r} \le t \le 1$, то

$$
\begin{aligned}
\int\limits_r^{1} \log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt &= \int\limits_r^{\sqrt{r}} \log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int\limits_{\sqrt{r}}^{1} \log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt \\
&= \int\limits_{\sqrt{r}}^{1} \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{n(r/x,g)}{x}\,dx + \int\limits_{\sqrt{r}}^{1} \log\frac{t+r}{t-r}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt \\
&\le 2\int\limits_{\sqrt{r}}^{1} \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{n(x,g)}{x}\,dx \le 2\int\limits_0^{1} \log\frac{2}{1-x}\cdot\frac{n(x,g)}{x}\,dx.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Підставивши (6) та (7) в (5) одержимо

$$
m_1(r,\widetilde{q}_\mu) \le \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{1} \log\frac{2}{1-t}\,\frac{n(t,g)}{t}\,dt, \qquad 0<r<1. \tag{8}
$$

Тоді враховуючи (4), (5), (8) та (3) маємо

$$
\begin{aligned}
m_1(r,F) &\le \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1} \log\frac{1}{1-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + \left(2+\frac{4\log 2}{\pi}\right)\int\limits_0^{1} \frac{n(t,g)}{t}\,dt \\
&\le \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{1} \log\frac{1}{1-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt + 3\int\limits_0^{1} \frac{n(t,g)}{t}\,dt,
\end{aligned}
$$

що завершує доведення пункту 1^0.

2^0. Твердження цього пункту безпосередньо випливає зі співвідношень (1) та (2).

3^0. З огляду на попередній пункт потрібно довести лише імплікацію (3)⇒(2). Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що міра μ зосереджена на додатному промені. Тоді маємо

$$
m_1(r,F) \ge \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{q}_\mu(re^{i\theta}) + \widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta, \qquad 0<r<1. \tag{9}
$$

З означення функції $p_\mu(z)$ та $q_\mu(z)$ одержуємо

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} |\widetilde{q}_\mu(re^{i\theta})+\widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg|\int_0^1 \frac{2rt\sin t}{1-2rt\cos t+t^2r^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt$$
$$+\int_r^1 \frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt+\int_0^r \frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt\Bigg|\,d\theta \qquad (10)$$
$$\geq \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^r \frac{2rt\sin\theta}{r^2-2rt\cos\theta+t^2}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \log\frac{r+t}{r-t}\,\frac{n(t,g)}{t}\,dt,$$

$0<r<1$. Оскільки

$$\log\frac{r+t}{r-t} \geq \log\frac{1+t}{1-t} \geq \log\frac{1}{1-t}, \qquad 0<t<r<1, \qquad (11)$$

то враховуючи нерівності (10) та (9), зі співвідношень (11) маємо

$$\sup_{0<r<1} m_1(r,F) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \log\frac{1}{1-t}\,\frac{n(t,g)}{t}\,dt, \qquad (12)$$

що завершує доведення пункту 3^0.

4^0. Нехай міра μ зосереджена на додатному промені така, що

$$\frac{C_1}{1-r}\,\log^{-2}\frac{1}{1-r} \leq n(r,g) \leq \frac{C_2}{1-r}\,\log^{-\alpha}\frac{1}{1-r},$$

де $1<\alpha\leq 2$, C_1, C_2 — деякі додатні сталі. Умова $\int_{\mathbb{D}}(1-|a|)\,d\mu_a < +\infty$ рівносильна до умови

$$\int_{r_0}^1 n(t,g)\,dt < +\infty, \qquad 0<r_0=\inf\{r>0:\ \operatorname{supp}\mu\cap\overline{\mathbb{D}}_r\neq\varnothing\}.$$

Оскільки

$$\int_{r_0}^1 n(t,g)\,dt \leq C_2\int_{r_0}^1 \frac{1}{1-t}\,\log^{-\alpha}\frac{1}{1-t}\,dt = C_2\int_{b_0}^{+\infty}\frac{dy}{y^\alpha} < +\infty,$$

де $b_0=-\log(1-r_0)$, то потенціал G_μ існує. Крім того

$$\int_{r_0}^1 \log\frac{1}{1-t}\cdot\frac{n(t,g)}{t}\,dt \geq C_1\int_{r_0}^1 \log^{-1}\frac{1}{1-t}\,\frac{dt}{1-t} = C_1\int_{b_0}^{+\infty}\frac{dy}{y} = +\infty.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (12), одержуємо $\sup\limits_{0<r<1} m_1(r,F)=+\infty$. □

Зауважимо, що умова (1) рівносильна до умови О. Фростмана

$$\int_{\mathbb{D}}(1-|a|)\log\frac{1}{1-|a|}\,d\mu_a < +\infty. \qquad (13)$$

У цьому неважко переконатися, записавши ліву частину нерівності (13) за допомогою інтеграла Стілтьєса, інтегруючи частинами та враховуючи нерівності

$$(1-r)\log\frac{1}{1-r}\,n(r,g) \leq \int_r^1 \log\frac{1}{1-t}\,n(r,g)\,dt = o(1), \quad r\nearrow 1,$$

$$(1-r)\log\frac{1}{1-r}\,n(t,g) \le \int\limits_0^r (1-t)\,\log\frac{1}{1-t}\,dn(t,g) = O(1), \quad r \nearrow 1.$$

2 Інтегральні середні $m_q(r,F)$ $(q>1)$.

Поведінку q-тих лебегових інтегральних середніх $m_q(r,F)$ $(1<q<+\infty)$ функції $F = g + i\breve{g}$ описує наступна теорема.

Теорема 4. 1^0. *Для довільного $q \in (1;+\infty)$ знайдеться така стала $M_1(q) > 0$, що при $r \nearrow 1$ виконується нерівність*

$$m_q(r,F) \le M_1(q)\left(\frac{1}{(1-r)^{1/q'}}\int\limits_r^1 \frac{n(t,g)}{t}\,dt + \int\limits_0^1 \frac{n(rt,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt\right).$$

2^0. *Нехай $G_\mu(z)$ — потенціал Ґріна, міра μ якого зосереджена на скінченній системі k радіальних променів. Тоді для довільного $q \in (1;+\infty)$ знайдеться така стала $M_2(q) > 0$, що при $r \nearrow 1$ виконується нерівність*

$$m_q(r,F) \ge \frac{M_2(q)}{k}\int\limits_0^r \frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt.$$

3^0. *Нехай $G_\mu(z)$ — потенціал Ґріна, міра μ якого зосереджена на скінченній системі радіальних променів, $1<q<+\infty$. Тоді умова*

$$\int\limits_0^1 \frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt < +\infty$$

є необхідною і достатньою для обмеженості функції $m_q(r,F)$ при $r \nearrow 1$.

4^0. *Нехай $1<q<+\infty$ і*

$$n(r,g) = O((1-r)^{-1/q}l(r)), \quad r \nearrow 1, \tag{14}$$

де $l(r)$ — деяка додатна на $(0;1)$ функція така, що

$$\int\limits_0^1 (1-t)^{-1}l(t)dt < +\infty, \tag{15}$$

то

$$m_q(r,F) = O(1), \quad r \nearrow 1. \tag{16}$$

Навпаки, нехай для потенціалу Ґріна $G_\mu(z)$, міра μ якого зосереджена на скінченній системі радіальних променів, виконується (16), $1<q<+\infty$. *Тоді знайдеться така додатна функція $l(t) = l_q(t)$, що $\lim\limits_{t\to 1-0} l(t) = 0$ і виконується співвідношення* (15) *та* (14).

5^0. *Нехай $n(r,g) = O((1-r)^{-\alpha})$, $\quad r \nearrow 1, \quad 0<\alpha\le\alpha_0$.*

а) Якщо $\alpha_0 < 1/q$, $1<q<+\infty$, то виконується (16).

б) Якщо ж $\alpha_0 \ge 1/q$, $1<q<+\infty$, то існує потенціал Ґріна G_μ, для якого виконується

$$\int\limits_0^1 n(t,g)(1-t)^{-1/q'}dt < +\infty \tag{17}$$

і $\lim\limits_{r\to 1-0} m_q(r,F) = +\infty$.

Доведення. 1^0. Нехай $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$, $z = re^{i\theta}$, $a = |a|\, e^{i\varphi}$. З огляду на лему 1 та нерівність Мінковського, для довільних $q \in (1; +\infty)$ та $r \in (0; 1)$ отримуємо

$$m_q(r, F) \le m_q(r, g) + m_q(r, \widetilde{g}) + m_q(r, \widetilde{p}_\mu). \tag{18}$$

З огляду на теорему 1, маємо $m_q(r, \widetilde{g}) + m_q(r, \widetilde{p}_\mu) \le M(q)(m_q(r, g) + m_q(r, p_\mu))$, а звідси, з урахуванням теореми 2 та (18) для всіх $0 < r < 1$ знаходимо

$$\begin{aligned} m_q(r, F) \le & C_1(q)(1 + M(q)) \left(\frac{1}{(1-r)^{1/q'}} \int\limits_r^1 \frac{n(t, g)}{t}\, dt + \int\limits_0^1 \frac{n(t, g)}{t}\, dt \right) \\ & + M(q) m_q(r, p_\mu) \le \frac{2C_1(q)(1 + M(q))}{(1-r)^{1/q'}} \int\limits_r^1 \frac{n(t, g)}{t}\, dt. \end{aligned} \tag{19}$$

де $M_1(q) = C_1(q)(1 + M(q))$.

Для оцінки останнього доданку в правій частині нерівності (19) двічі застосуємо інтегральну нерівність Мінковського (див. [3, с. 24]) і зробимо заміну змінної $t = r\tau$. Отримуємо

$$\begin{aligned} m_q(r, p_\mu) &\le \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{|a| \le t} \mathcal{P}(r, te^{i(\theta - \varphi)})\, d\mu_a \right) d\theta \right)^{1/q} \\ &\le \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_{|a| \le t} d\mu_a \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}(r, te^{i(\theta - \varphi)}) \right)^q d\theta \right)^{1/q} \\ &= \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_{|a| \le r\tau} d\mu_a \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}(1, re^{i(\theta - \varphi)}) \right)^q d\theta \right)^{1/q}, \quad 1 < q < +\infty. \end{aligned}$$

Зауважимо, що внутрішній інтеграл в останній нерівності не залежить від φ. Тому при $1 < q < +\infty$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, $0 < t < 1$, враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}(1, te^{ix}) \right)^q dx \right)^{1/q} &\le \left(\max_{0 \le x \le 2\pi} \mathcal{P}(1, te^{ix}) \right)^{1/q'} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{P}(1, te^{ix})\, dx \right)^{1/q'} \\ &= \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{1/q'} \le \frac{2^{1/q'}}{(1-t)^{1/q'}}, \end{aligned}$$

знаходимо

$$m_q(r, p_\mu) \le 2^{1/q'} \int\limits_0^1 \frac{n(rt, g)}{t(1-t)^{1/q'}}\, dt, \qquad 0 < r < 1,$$

що разом з нерівністю (19) дає

$$m_q(r, F) \le M_1(q) \left(\frac{1}{(1-r)^{1/q'}} \int\limits_r^1 \frac{n(t, g)}{t}\, dt + \int\limits_0^1 \frac{n(rt, g)}{(1-t)^{1/q'}}\, dt \right),$$

де $M_1(q)$ — деяка додатна стала.

2^0. Нехай $g(z) = G_\mu(z) - G_\mu(0)$, $z = re^{i\theta}$. Нагадаємо, що за лемою 1 $F = g + i\breve{g} = g + i(\widetilde{g} - \widetilde{p}_\mu)$. Тоді, враховуючи нерівність Мінковського, одержимо

$$\begin{aligned} m_q(r, \widetilde{p}_\mu) =& m_q(r, i(\widetilde{g} - \widetilde{p}_\mu) + g - g - i\widetilde{g}) \\ \leq& m_q(r, g + i\widetilde{g}) + m_q(r, F), \qquad 1 < q < +\infty, \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Згідно з теоремою 1, маємо $m_q(r, \widetilde{g}) \leq M(q)\, m_q(r, g)$, $0 < r < 1$, і тому

$$m_q(r, g + i\widetilde{g}) \leq (1 + M(q)) m_q(r, g) \leq (1 + M(q)) m_q(r, F), \tag{21}$$

оскільки $m_q(r, g) \leq m_q(r, F)$. Тоді підставивши (21) в (20), одержимо

$$m_q(r, \widetilde{p}_\mu) \leq M_3(q) m_q(r, F), \quad 0 < r < 1, \tag{22}$$

де $M_3(q) = 2 + M(q)$.

Отже, нам залишилося дати оцінку знизу при $r \nearrow 1$ функцій $m_q(r, \widetilde{p}_\mu)$, $1 < q < +\infty$. Нехай борелева міра $\mu \geq 0$ зосереджена на скінченній системі k променів $\{te^{i\varphi_j}\}_{j=1}^k$, $0 \leq \varphi_1 < \cdots < \varphi_k < 2\pi$, $0 < t < 1$, $n_j(r) = \mu(\{te^{i\varphi_j}\})$, $0 < t \leq r < 1$.

Очевидно, що $\sum\limits_{j=1}^k n_j(r) = n(r, g)$. У цьому випадку функція $p_\mu(z)$ набуде вигляду

$$p_\mu(z) = \sum_{j=1}^k \int_0^r \frac{n_j(t)}{t} \mathcal{P}(r, te^{i(\theta - \varphi)})\, dt, \quad z = re^{i\theta}.$$

Позначимо

$$L(re^{i\theta}) = \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2 + 4)} \sum_{j=1}^k \int_0^r \left(\left| \frac{1 + \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}}{1 - \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}} \right|^{1/q'} \right)^{\sim} d\rho.$$

Добре відомо [3, с. 118], що функція $F(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$, належить до просторів Гарді $H^\alpha(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < 1$, і

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\rho re^{ix})|^\alpha\, dx \leq M_4(\alpha) |F(0)|^\alpha = M_4(\alpha),$$

де $M_4(\alpha) = 1/\cos(\dfrac{\pi\alpha}{2})$. Окрім того, функція $|F(z)|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, субгармонійна. Тому [див. 3, с. 72]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\rho re^{ix})|^\alpha \mathcal{P}(r, te^{ix})\, dx \geq |F(\rho t)|^\alpha \geq (1 - \rho t)^{-\alpha}, \qquad t > 0, \quad \rho < r. \tag{23}$$

Застосувавши теорему 1 до функції $L(z)$, а також, врахувавши нерівність Мінковського та нерівності

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + \rho re^{ix}}{1 - \rho re^{ix}} \right| dx \leq 1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - \rho r}, \qquad \int_0^r \log \frac{2}{1 - \rho r}\, d\rho \leq \frac{\log 2e}{r} \leq \frac{2}{r},$$

знаходимо

$$m_{q'}(r, L) \leq \frac{\pi r}{k(\pi r^2 + 4)} \sum_{j=1}^k \int_0^r d\rho \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1 + \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}}{1 - \rho re^{i(\theta - \varphi_j)}} \right| d\theta \right)^{1/q'}$$

$$\leq \frac{\pi r}{\pi r^2+4}\int\limits_0^r \left(1+\frac{2}{\pi}\log\frac{2}{1-\rho r}\right)^{1/q'} d\rho \leq \frac{\pi r}{\pi r^2+4}\left(r+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r \log\frac{2}{1-\rho r}\,d\rho\right) \leq 1.$$

Тому, з урахуванням нерівності Гельдера, для всіх $1<q<+\infty$, $0<r<1$, одержуємо

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{p}_\mu(re^{i\theta})L(re^{i\theta})\,d\theta\right| \leq m_q(r,\widetilde{p}_\mu)m_{q'}(r,L) \leq m_q(r,\widetilde{p}_\mu). \tag{24}$$

Далі, враховуючи [1, с. 225]

$$\left(\tilde{f}(e^{i\theta})\right)^{\sim} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{ix})\,dx - f(e^{i\theta})$$

та нерівність (22) одержимо

$$-\widetilde{L}(re^{i\theta}) \geq \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2+4)}\left(\sum_{j=1}^k\int\limits_0^r \left|\frac{1+\rho re^{i(\theta-\varphi_j)}}{1-\rho re^{i(\theta-\varphi_j)}}\right|^{1/q'} d\rho - krM_4\left(\frac{1}{q'}\right)\right). \tag{25}$$

Тоді, з огляду на співвідношення дуальності [4, с. 117] зі співвідношень (24), (25) та (23) випливає, що

$$m_q(r,\tilde{p}_\mu) \geq -\int\limits_0^{2\pi} p_\mu(re^{i\theta})\tilde{L}(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} \geq \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2+4)}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^k\sum_{\nu=1}^k\int\limits_0^r \frac{n_j(t)}{t}\,dt\int\limits_0^r d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{1+\rho re^{i(\theta-\varphi_\nu)}}{1-\rho re^{i(\theta-\varphi_\nu)}}\right|^{1/q'}\mathcal{P}(r,te^{i(\theta-\varphi_j)})\frac{d\theta}{2\pi} - krM_4(\frac{1}{q'})\int\limits_0^r\frac{n(t,g)}{t}\,dt\right)$$

$$\geq \frac{\pi r}{M(q')k(\pi r^2+4)}\left(\int\limits_0^r\frac{n(t,g)}{t}\,dt\int\limits_0^r\frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} - krM_4(1/q')\int\limits_0^r\frac{n(t,g)}{t}\,dt\right).$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_0^r\frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} \geq \int\limits_0^t\frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} \geq \frac{t}{(2(1-t))^{1/q'}}, \tag{26}$$

$$\int\limits_0^r\frac{n(t,g)}{t}\,dt = \mathrm{o}\left(\int\limits_0^r\frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt\right), \quad r\nearrow 1, \tag{27}$$

$$\frac{\pi r}{\pi r^2+4} > \frac{1}{5} \tag{28}$$

при $\frac{1}{2}\leq r<1$.

Співвідношення (26)–(28) разом з (22) дають

$$m_q(r,F) \geq \frac{M_5(q)}{k}\int\limits_0^r\frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}\,dt, \quad \text{де} \quad M_5(q) = \frac{1}{20M(q')+10}, \quad 1/q+1/q'=1.$$

3^0. Твердження цього пункту негайно випливає з тверджень пунктів 1^0 та 2^0 цієї теореми.

4^0. Співвідношення (16) легко випливає з твердження пункту 1^0 цієї теореми, співвідношень (14), (15) та

$$(1-t)^{-1/q'}n(t,g) = O((1-t)^{-1}l(t)), \quad t \nearrow 1.$$

Навпаки, нехай виконується співвідношення (16). Спочатку зауважимо, що

$$\int_0^1 n(t,g)dt = \int_{\mathbb{D}} (1-|a|)d\mu_a < +\infty.$$

Тому для всіх $r \in (0;1)$ маємо

$$n(r,g)(1-r) \le \int_r^1 n(t,g)dt,$$

або

$$n(r,g)(1-r)^{1/q} \le (1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,g)dt := l(r), \quad 1/q + 1/q' = 1,$$

тобто

$$n(r,g) \le (1-r)^{-1/q} l(r). \tag{29}$$

Враховуючи (29), необхідне твердження буде встановлено, якщо ми покажемо, що $\lim\limits_{r\to 1} l(r) = 0$ і функція $l(r)$ задовольняє умову (15). Справді, з умови (17) випливає, що

$$n(r,g)(1-r)^{1/q} \le q^{-1} \int_r^1 n(t,g)(1-t)^{-1/q'}dt \to 0, \quad r \nearrow 1.$$

Тоді, застосовуючи правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{r\to 1} l(r) = \lim_{r\to 1}(1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,g)dt = q' \lim_{r\to 1} n(r,g)(1-r)^{1/q} = 0.$$

Далі, інтегруючи частинами, дістаємо

$$\int_0^1 \frac{l(t)}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{\int_t^1 n(\tau,g)d\tau}{(1-t)^{1+1/q'}}dt = q' \left[\int_0^1 \frac{n(t,g)}{(1-t)^{1/q'}}dt - \int_0^1 n(t,g)dt\right]$$
$$\le q' \int_0^1 n(t,g)(1-t)^{-1/q'}dt,$$

що разом з (17) дає (15).

5^0. Твердження а) негайно випливає з твердження пункту 4^0 при $l(r) = (1-r)^{1/q-\alpha_0}$. Для доведення твердження б) досить взяти такий потенціал Ґріна G_μ, міра μ якого зосереджена на скінченній системі радіальних променів, що

$$C_1(1-r)^{-1/q} \le n(r,g) \le C_2(1-r)^{-\alpha}, \quad 1 < q < +\infty, \quad r \nearrow 1,$$

де C_1, C_2 — деякі додатні сталі, та врахувати твердження пункту 2^0 цієї теореми. □

References

[1] Dyn'kin E.M. *Methods of the theory of singular integrals (Hilbert transform and Calderon-Zygmund theory)*. Itogi nauki i tekhniki. Sovremen. Problemy mat. Fundam. Naprav. VINITI 1987, 15, 197–292. (in Russian)

[2] Edwards R. Fourier series a modern introduction. V. 1. Springer-Verlag, New York, 1979.

[3] Eiko V.V., Kondratyuk A.A. *Integral logarithmic means of Blaschke products*. Math. Notes 1988, 64, 199–206. (in Russian) doi:10.1007/BF02310301

[4] Garnett J.B. Bounded analytic functions. Academic Press, New York, 1981.

[5] Hayman W.K. Subharmonic functions. V. 2. Academic Press Ltd, London, 1989.

[6] Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions. V. 1. Academic Press Inc., London, 1976.

[7] Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V. *Conjugate of subharmonic function*. Mat. Stud. 2000, 13, 173–180.

[8] Vasyl'kiv Ya.V. *On the boundedness of the total variation of the logarithm of a Blaschke product*. Ukrainian Math. J. 1999, 51, 1449–1455. (in Ukrainian) doi:10.1007/BF02525267

[9] Vasyl'kiv Ya.V., Kondratyuk A.A. *Integral logarithmic means of Blaschke products*. Visn. Lviv University 1999, 53, 52–61. (in Ukrainian)

Надійшло 18.06.2012

Vasyl'kiv Ya.V., Kravec M.Ya. *Integral mean of Green's potentials and their conjugate*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 19–29.

The best possible estimates for Lebesgue integral means $m_q(r, F)$ $(1 \leq q < +\infty)$ for the pair of functions $F = g + i\,\breve{g}$, here g — Green's potential, $\breve{g}$ — function conjugate to g, was obtained. It generalizes well-known results of Ya.V. Vasyl'kiv and A.A. Kondratyuk for logarithms $\log B$ of Blaschke products B in terms of counting function $n(r, 0, B)$ $(0 < r < 1)$ of their zeroes.

Key words and phrases: Green's potentials, conjugate function, Lebesgue integral means, distribution of values of subharmonic functions.

Василькив Я.В., Кравец М.Я. *Интегральные средние потенциалов Грина и их сопряженных* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 19–29.

Установлено неулучшаемые оценки q-тых $(1 \leq q < +\infty)$ интегральных средних Лебега пары функций $F = g + i\,\breve{g}$, где g — потенциал Грина, а $\breve{g}$ — функция, сопряженная к g. Они обобщают соответственные результаты Я.В. Василькива и А.А. Кондратюка для логарифмов $\log B$ произведений Бляшке B в терминах счетной функции $n(r, 0, B)$ $(0 < r < 1)$ их нулей.

Ключевые слова и фразы: потенциали Грина, сопряженная функция, интегральные средние Лебега, распределение значений субгармонических функций.