Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

Семенчук А.В.

ПРО ДЕЯКІ АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ КУБІЧНИХ ПОЛІВ ТА ПОЛІВ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ

Семенчук А.В. *Про деякі алгоритми обчислень для кубічних полів та полів четвертого степеня* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 130–138.

Побудовано ефективні алгоритми обчислень у кубічних полях та полях четвертого степеня.

Вступ

Вивченню (n, m)-форм $s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$ числового поля $Q(m)$ степеня n присвячено чимало робіт. При цьому основна увага аналітиків була зосереджена на вивченні їх цілочислових базисів та одиниць. Випадок $n = 2$ в основному досліджений Валлісом в Commercium aepistolicum (1657 р.) Проте окремі аспекти досліджень у цьому напрямку проводяться і нині [4]. Випадок $n = 3$ більш складний. Його досліджували Якобі, Пуанкаре, Гурвіц. Вороний проводив свої дослідження на основі узагальнень неперервних дробів [1]. Техніці роботи з $(3, m)$-формами, які Делоне та Фадеєв називають кубічними числами у [2] присвячено цілий розділ. Алгоритми обчислення степенів (n, m)-форм корисні при дослідженні структури множини фундаментальних одиниць у кільці цілих чисел полів.

У роботі, при допомозі апарату числення трикутних матриць [3] побудовано рекурсивні алгоритми роботи із (n, m)-формами третього та четвертого порядку та наведено ряд прикладів, що ілюструють їх ефективність у порівнянні з алгоритмами, запропонованими у [2].

1 Кубічні рівняння та ірраціональності

Розглянемо кубічні ірраціональності виду

$$x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.
Ключові слова і фрази: кубічні поля, параперманенти, алгебраїчні ірраціональності.

© Семенчук А.В., 2011

де a, b, c, n — деякі раціональні числа, що назваються *кубічними формами* [3].

Коефіцієнти кубічного рівняння

$$x^3 = qx^2 + px + r, \tag{2}$$

яке задовольняє кубічна форма (1), можна знайти, розв'язавши відповідну систему рівнянь, або простіше, при допомозі перетворень Чирнгаузена [2].

Маємо:

$$\begin{cases} q = 3a, \\ p = 3(cbn - a^2), \\ r = b^3n + c^3n^2 + a^3 - 3abcn \end{cases} \tag{3}$$

Якщо норма кубічної форми дорівнює одиниці, то довільний її степінь також дорівнює одиниці. В зв'язку з цим виникають циклічні групи одиниць. Для генерування елементів таких груп корисними виявляються наступні дві теореми.

Теорема 1. *Якщо $x^3 = qx^2 + px + r$ і $x^m = Q_mx^2 + P_mx + R_m$, то виконуються рівності:*

$$Q_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-2}, \quad P_m = \begin{bmatrix} p & & & & & & \\ \frac{r}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-2},$$

$$R_m = \begin{bmatrix} r & & & & & & \\ 0 & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-2}, \; m = 3, 4, \dots.$$

Доведення. Маємо $x^{m+1} = Q_{m+1}x^2 + P_{m+1}x + R_{m+1}$. З іншого боку, маємо рівності

$$x^{m+1} = Q_mx^3 + P_mx^2 + R_mx = Q_m(qx^2 + px + r) + P_mx^2 + R_mx =$$

$$(qQ_m + P_m)x^2 + (pQ_m + R_m)x + Q_mr,$$

але коефіцієнти $qQ_m + P_m$, $pQ_m + R_m$, Q_mr є відповідно розкладом параперманентів Q_{m+1}, P_{m+1}, R_{m+1} за елементами першого стовпця. □

Розкладаючи параперманент Q_m у теоремі 1 за елементами останнього рядка, маємо лінійне рекурентне рівняння третього порядку $Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}$ з початковими умовами $Q_2 = 1$, $Q_{<2} = 0$.

Розкладаючи параперманент для P_m за елементами першого стовпця, дістанемо рекурсію $P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2}$, $m = 3, 4, \dots$. Аналогічно можна одержати рекурсію $R_m = rQ_{m-1}$, $m = 3, 4, \dots$. Таким чином, коефіцієнти Q_m, P_m, R_m, $m = 3, 4, \dots$, у теоремі 1 можна знайти із рекурсій

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}, \quad Q_2 = 1, \quad Q_{<0} = 0,$$

$$P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2}, \quad R_m = rQ_{m-1}, \quad m = 3, 4, \dots,$$

що дають простий алгоритм їх обчислення.

Теорема 2. *Нехай $x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$ є коренем рівняння $x^3 = qx^2 + px + r$, тоді*

$$x^m = A_m + B_m\sqrt[3]{n} + C_m\sqrt[3]{n^2},$$

причому

$$3A_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & \\ \frac{2p}{q} & q & & & & & \\ \frac{3r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m, \tag{4}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} b & & & & & & \\ \frac{nc^2-ab}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m, \quad C_m = \begin{bmatrix} c & & & & & & \\ \frac{b^2-ac}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m.$$

Доведення. Розкладаючи параперманент (4) за елементами першого стовпця, можна отримати рівності:

$$3A_m = q[]_{m-1} + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} = q(q[]_{m-2} + p[]_{m-3} + r[]_{m-4}) + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} =$$

$$(q^2 + 2p)[]_{n-2} + (qp + 3r)[]_{m-3} + qr[]_{m-4},$$

де символом $[]_m$ позначено параперманент

$$Q_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m.$$

З іншого боку, згідно з теоремою 1, маємо рівності

$$x^m = Q_m x^2 + P_m x + R_m =$$
$$\Big((a^2+2bcn)+(c^2n+2ab)\sqrt[3]{n}+(b^2+2ac)\sqrt[3]{n^2}\Big)\,Q_m+(a+b\sqrt[3]{n}+c\sqrt[3]{n^2})P_m+R_m =$$
$$\big((a^2+2bcn)Q_m+aP_m+R_m\big)+\big((c^2n+2ab)Q_m+bP_m\big)\sqrt[3]{n}+\big((b^2+2ac)Q_m+cP_m\big)\sqrt[3]{n^2}.$$

Тому справедливою буде рівність

$$A_m = (a^2+2bcn)Q_m + aP_m + R_m.$$

Але, згідно з рівностями (3), маємо $a^2+2bcn=\frac{1}{3}(q^2+2p)$ і $a=\frac{q}{3}$, отже,

$$3A_m = (q^2+2p)[]_{m-2} + q(p[]_{m-3}+r[]_{m-4}) + 3r[]_{m-3} =$$
$$(q^2+2p)[]_{m-2} + (qp+3r)[]_{m-3} + qr[]_{m-4}.$$

□

Параперманент Q_m задовольняє рекурсію

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}, \quad Q_0 = 1, \quad Q_{<0} = 0.$$

Коефіцієнти A_m, B_m, C_m можна знайти із рекурсій

$$3A_m = qQ_{m-1} + 2pQ_{m-2} + 3rQ_{m-3},$$
$$B_m = bQ_{m-1} + (nc^2-ab)Q_{m-2},$$
$$C_m = cQ_{m-1} + (b^2-ac)Q_{m-2}, \quad m = 1,2,\dots.$$

2 Рівняння та ірраціональності четвертого степеня

Розглянемо ірраціональності четвертого степеня виду

$$x = a + b\sqrt[4]{n} + c\sqrt[4]{n^2} + d\sqrt[4]{n^3}, \tag{5}$$

де a, b, c, d, n — деякі раціональні числа.

Знаходимо коефіцієнти рівняння четвертого степеня

$$x^4 = qx^3 + px^2 + rx + s,$$

яке задовольняє форма (5). Вони дорівнюють

$$\begin{cases} q = 4a, \\ p = 2(c^2n+2bdn-3a^2), \\ r = 4(a^3+b^2cn+cd^2n^2-ac^2n-2abdn) \\ s = d^4n^3-c^4n^2+b^4n-a^4-2b^2d^2n^2+4bc^2dn^2-4a^2bdn+2a^2c^2n-4ab^2cn-4acd^2n^2 \end{cases} \tag{6}$$

Знайшовши один корінь діофантового рівняння

$$d^4n^3-c^4n^2+b^4n-a^4-2b^2d^2n^2+4bc^2dn^2-4a^2bdn+2a^2c^2n-4ab^2cn-4acd^2n^2 = 1,$$

послідовним піднесенням до степеня можна отримати ряд нових його розв'язків. Тому корисними виявляються наступні теореми.

Теорема 3. *Якщо* $x^4 = qx^3 + px^2 + rx + s$ *і* $x^m = Q_m x^3 + P_m x^2 + R_m x + S_m$, *то виконуються рівності*

$$Q_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3}, \quad P_m = \begin{bmatrix} p & & & & & & & \\ \frac{r}{q} & q & & & & & & \\ \frac{s}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3},$$

$$R_m = \begin{bmatrix} r & & & & & & & \\ \frac{s}{q} & q & & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3}, \quad S_m = \begin{bmatrix} s & & & & & & & \\ 0 & q & & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3},$$

де $m = 4, 5, \dots$.

Доведення. Маємо $x^{m+1} = Q_{m+1}x^3 + P_{m+1}x^2 + R_{m+1}x + S_{m+1}$. Але

$$x^{m+1} = Q_m x^4 + P_m x^3 + R_m x^2 + S_m x = Q_m(qx^3 + px^2 + rx + s) + P_m x^3 + R_m x^2 + S_m x =$$

$$(qQ_m + P_m)x^3 + (pQ_m + R_m)x^2 + (rQ_m + S_m)x + sQ_m.$$

Позаяк коефіцієнти $qQ_m + P_m$, $pQ_m + R_m$, $rQ_m + S_m$, sQ_m є відповідно розкладом параперманентів Q_{m+1}, P_{m+1}, R_{m+1}, S_{m+1} за елементами першого стовпця, то теорема виконується. □

Розкладаючи параперманент Q_m у теоремі 3 за елементами останнього рядка, маємо лінійне рекурентне рівняння четвертого порядку

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3} + sQ_{m-4}, \quad Q_3 = 1, \quad Q_{<3} = 0.$$

Розкладаючи параперманент для P_m за елементами першого стовпця, дістанемо рекурсію $P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2} + sQ_{m-3}$, $m = 4, 5, \dots$. Аналогічно можна одержати рекурсії $R_m = rQ_{m-1} + sQ_{m-2}$, $S_m = sQ_{m-1}$, $m = 4, 5, \dots$. Таким чином, коефіцієнти Q_m, P_m, R_m, S_m, $m = 3, 4, \dots$, у теоремі 3 можна знайти із рекурсій

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3} + sQ_{m-4}, \quad Q_2 = 1, \quad Q_{<0} = 0,$$

$$P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2} + sQ_{m-3}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

$$R_m = rQ_{m-1} + sQ_{m-2}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

$$S_m = sQ_{m-1}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

що дають простий алгоритм обчислення коефіцієнтів.

Приклад 2.1. *Нехай* $x^4 = 16x^3 - 56x^2 + 256x - 862$, *тоді* $x^7 = Q_7x^3 + P_7x^2 + R_7x + S_7$. *Користуючись рекурсіями*

$$Q_m = 16Q_{m-1} - 56Q_{m-2} + 256Q_{m-3} - 862Q_{m-4}, \quad Q_3 = 1, \quad Q_{<3} = 0,$$

$$P_m = -56Q_{m-1} + 256Q_{m-2} - 862Q_{m-3},$$

$$R_m = 256Q_{m-1} - 862Q_{m-2},$$

$$S_m = -862Q_{m-1}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

отримаємо

$$S_4 = -862, \quad R_4 = 256, \quad P_4 = -56, \quad Q_4 = 16,$$

$$S_5 = -13792, \quad R_5 = 3234, \quad P_5 = -640, \quad Q_5 = 200,$$

$$S_6 = -172400, \quad R_6 = 37408, \quad P_6 = -7966, \quad Q_6 = 2560,$$

$$S_7 = -2206720, \; R_7 = 482960, \; P_7 = -105952, \; Q_7 = 32994.$$

Отже, $x^7 = 32994x^3 - 105952x^2 + 482960x - 2206720$.

Теорема 4. *Нехай* $x = a + b\sqrt[4]{n} + c\sqrt[4]{n^2} + d\sqrt[4]{n^3}$ *є коренем рівняння* $x^4 = qx^3 + px^2 + rx + s$, *тоді*

$$x^m = A_m + B_m\sqrt[4]{n} + C_m\sqrt[4]{n^2} + D_m\sqrt[4]{n^3},$$

причому

$$4A_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & & \\ \frac{2p}{q} & q & & & & & & \\ \frac{3r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{4s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m, \tag{7}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} b & & & & & & & \\ \frac{2cdn-2ab}{q} & q & & & & & & \\ \frac{\alpha}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m,$$

$$C_m = \begin{bmatrix} c & & & & & & & \\ \frac{b^2+d^2n-2ac}{q} & q & & & & & & \\ \frac{\beta}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m ,$$

$$D_m = \begin{bmatrix} c & & & & & & & \\ \frac{2bc-2ad}{q} & q & & & & & & \\ \frac{\gamma}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m ,$$

де $\alpha = d^3n^2 + a^2b + bc^2n - b^2dn - 2acdn$, $\beta = a^2c - ab^2 - ad^2n - c^3n + 2bcdn$, $\gamma = a^2d - bd^2n + c^2dn - 2abc + b^3$.

Доведення. Розкладаючи параперманент (7) за елементами першого стовпця, можна отримати рівності:

$$4A_m = q[]_{m-1} + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} + 4s[]_{m-4} = q(q[]_{m-2} + p[]_{m-3} + r[]_{m-4} + s[]_{m-5}) +$$

$$2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} + 4s[]_{m-4} = (q^2 + 2p)[]_{m-2} + (qp + 3r)[]_{m-3} + (qr + 4s)[]_{m-4} + qs[]_{m-5},$$

де символом $[]_m$ позначено параперманент

$$Q_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m .$$

З іншого боку, згідно з теоремою 3, маємо рівності

$$x^m = Q_m x^3 + P_m x^2 + R_m x + S_m =$$

$$((a^3 + 6abdn + 3ac^2n + 3cd^2n^2 + 3b^2cn) + (d^3n^2 + 3a^2b + 3bc^2n + 3b^2dn + 6acdn)\sqrt[4]{n} +$$

$$(3a^2c+3ab^2+3ad^2n+c^3n+6bcdn)\sqrt[4]{n^2}+(3a^2d+3bd^2n+3c^2dn+6abc+b^3)\sqrt[4]{n^3})Q_m+$$
$$\left((a^2+2bdn+c^2n)+(2cdn+2ab)\sqrt[4]{n}+(b^2+d^2n+2ac)\sqrt[4]{n^2}+(2bc+2ad)\sqrt[4]{n^3}\right)P_m+$$
$$(a+b\sqrt[4]{n}+c\sqrt[4]{n^2}+d\sqrt[4]{n^3})R_m+S_m=$$
$$\left((a^3+6abdn+3ac^2n+3cd^2n^2+3b^2cn)Q_m+(a^2+2bdn+c^2n)P_m+aR_m+S_m\right)+$$
$$\left((d^3n^2+3a^2b+3bc^2n+3b^2dn+6acdn)Q_m+(2cdn+2ab)P_m+bR_m\right)\sqrt[4]{n}+$$
$$\left((3a^2c+3ab^2+3ad^2n+c^3n+6bcdn)Q_m+(b^2+d^2n+2ac)P_m+cR_m\right)\sqrt[4]{n^2}+$$
$$\left((3a^2d+3bd^2n+3c^2dn+6abc+b^3)Q_m+(2bc+2ad)P_m+dR_m\right)\sqrt[4]{n^3}.$$

Тому справедливою буде рівність

$$A_m=(a^3+6abdn+3ac^2n+3cd^2n^2+3b^2cn)Q_m+(a^2+2bdn+c^2n)P_m+aR_m+S_m.$$

Але, згідно з рівностями (6), маємо $a^3+6abdn+3ac^2n+3cd^2n^2+3b^2cn=\frac{1}{4}(q^3+3qp+3r)$, $a^2+2bdn+c^2n=\frac{1}{4}(q^2+2p)$ і $a=\frac{q}{4}$, отже,

$$4A_m=(q^3+3qp+3r)[]_{m-3}+(q^2+2p)(p[]_{m-4}+r[]_{m-5}+s[]_{m-6})+q(r[]_{m-4}+s[]_{m-5})+4s[]_{m-4}=$$
$$(q^2+2p)[]_{m-2}+(qp+3r)[]_{m-3}+(qr+4s)[]_{m-4}+qs[]_{m-5}.$$

□

Для параперманента Q_m справедливою є рекурсія

$$Q_m=qQ_{m-1}+pQ_{m-2}+rQ_{m-3}+sQ_{m-4},\quad Q_0=1,\quad Q_{<0}=0,$$

коефіцієнти A_m, B_m, C_m, D_m можна знайти із рекурсій

$$4A_m=qQ_{m-1}+2pQ_{m-2}+3rQ_{m-3}+4sQ_{m-4},$$
$$B_m=bQ_{m-1}+(2cdn-2ab)Q_{m-2}+\alpha Q_{m-3},$$
$$C_m=cQ_{m-1}+(b^2+d^2n-2ac)Q_{m-2}+\beta Q_{m-3},$$
$$D_m=dQ_{m-1}+(2bc-2ad)Q_{m-2}+\gamma Q_{m-3},\quad m=1,2,\ldots.$$

Приклад 2.2. *Нехай* $x=4+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2^3}$ *є коренем рівняння* $x^4=16x^3-56x^2+256x-862$, *тоді*

$$x^5=A_5+B_5\sqrt[4]{2}+C_5\sqrt[4]{2^2}+D_5\sqrt[4]{2^3}.$$

Користуючись рекурсіями

$$4A_m=16Q_{m-1}-112Q_{m-2}+768Q_{m-3}-3448Q_{m-4},$$
$$B_m=3Q_{m-1}-16Q_{m-2}+26Q_{m-3},\quad C_m=2Q_{m-1}-5Q_{m-2}-4Q_{m-3},$$
$$D_m=Q_{m-1}+4Q_{m-2}-3Q_{m-3},\quad Q_m=16Q_{m-1}-56Q_{m-2}+256Q_{m-3}-862Q_{m-4},$$
$$Q_0=1,\quad Q_{<0}=0,\quad m=1,2,\ldots$$

отримаємо

$$4A_1 = 16, \quad B_1 = 3, \quad C_1 = 2, \quad D_1 = 1, \quad Q_1 = 16,$$

$$4A_2 = 144, \quad B_2 = 32, \quad C_2 = 27, \quad D_2 = 20, \quad Q_2 = 200,$$

$$4A_3 = 2176, \quad B_3 = 370, \quad C_3 = 316, \quad D_3 = 261, \quad Q_3 = 2560,$$

$$4A_4 = 27400, \; B_4 = 4896, \; C_4 = 4056, \; D_4 = 3312, \; Q_4 = 32994,$$

$$4A_5 = 339616 \Rightarrow A_5 = 84904, B_5 = 63222, C_5 = 52388, D_5 = 42634.$$

Отже, $x^5 = 84904 + 63222\sqrt[4]{2} + 52388\sqrt[4]{2^2} + 42634\sqrt[4]{2^3}$.

Література

1. Вороной Г.Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Докторская диссертация, Варшава, 1896 г.
2. Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К. Теория иррациональностей третьей степени – М.: Изд-во АН СССР, 1940. – 340 с.
3. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування – Івано-Франківськ: Вид-во Сімик, 2010. – 508 с.
4. Steuding J., *Diophantine Analysis*, Chapman-Hall, CRC Press, 2005.

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна.

Надійшло 28.02.2011

Semenchuk A.V. *About some algorithms of calculations for the cube fields and fields of fourth degree*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 130–138.

The effective algorithms of calculations are built in the cube fields and fields of fourth degree.

Семенчук А.В. *О некоторых алгоритмах вычислений для кубических полей и полей четвертой степени* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 130–138.

Построены эффективные алгоритмы вычислений в кубических полях и полях четвертой степени.