Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.51

Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В.

КОЛИВАННЯ НАРІЗНО ЛОКАЛЬНО ЛІПШИЦЕВИХ ФУНКЦІЙ

Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Коливання нарізно локально ліпшицевих функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 22–33.

Доведено, що функція, яка визначена на добутку двох берівських метричних просторів, є коливанням деякої нарізно локально ліпшицевої функції тоді і тільки тоді, коли вона є невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, замикання носія якої є навхрест ніде не щільним.

1 Вступ

Дана робота іде в руслі цілого ряду статей багатьох математиків, таких як Р. Кешнер, Дж. Бреккенрідж і Т. Нішіура, П. Костирко, Й. Еверт, С. Пономарьов, В. Маслюченко, В. Михайлюк, О. Маслюченко, В. Герасимчук та ін.. Ці статті присвячені розв'язанню задачі про опис множини точок розриву функцій з того чи іншого функціонального класу, а також її уточненої версії про опис коливань функцій з певного функціонального класу.

Загальне формулювання цих двох задач виглядає так. Нехай P — деяка властивість функцій на певному топологічному просторі X.

Задача A. *Для яких множин $E \subseteq X$ існує така функція $f : X \to \mathbb{R}$, що має властивість P, для якої множина точок розриву $D(f)$ рівна E.*

Задача B. *Для яких функцій $g : X \to [0, +\infty]$ існує така функція $f : X \to \mathbb{R}$, що має властивість P, для якої коливання ω_f рівне g.*

В роботі [2] було охарактеризовано множину точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій на $\mathbb{R}^2$. Крім того, в [1] було наведено повний опис коливань нарізно неперервно диференційовних функцій на добутку двох скінченно вимірних просторів і нарізно локально ліпшицевих функцій на добутку двох локально компактних метричних просторів. Ці характеризації полягали в тому, що носій функції g є локально проективно ніде не щільним. Проте перенести ці результати на випадок коли простори

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54C10.

Ключові слова і фрази: коливання, ω-primitive, локально ліпшицева функція, нарізно локально ліпшицева функція, $C\mathcal{L}$-функція.

не є локально компактними довший час не вдавалось. Виявляється, що причина полягає в тому, що умова локальної проективної ніде не щільності носія, яка добре працює у локально компактному випадку, не підходить у загальному випадку. Замінником цієї властивості є навхрест ніде не щільність замикання носія, яка в цій роботі називається $\overline{hv}$-ніде не щільністю.

Наступні теореми є головними результатами цієї роботи і були анонсовані у [3]. Вони випливають з теорем 3, 4, 5 і наслідку 4.1.

Теорема 1. *Нехай P та Q — деякі локальні однорідні властивості дійснозначних функцій, які сильніші за локальну ліпшицевість, X — P-регулярний берівський метричний простір, а Y — Q-регулярний берівський метричний простір. Для того, щоб функція $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ була коливанням деякої PQ-функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб g була невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, а її носій $\mathrm{supp} g$ був $\overline{hv}$-ніде не щільним.*

Теорема 2. *Нехай P — деяка локальна однорідна властивість дійснозначних функцій, що сильніша за локальну ліпшицевість, X — берівський метричний простір, а Y — P-регулярний берівський метричний простір. Для того, щоб функція $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ була коливанням деякої CP-функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб g була невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, а її носій $\mathrm{supp} g$ був $h\overline{v}$-ніде не щільним.*

2 Точкова та локальна ліпшицевість і диференційовність

Для метричних просторів X та Y, відображення $f : X \to Y$, множини $E \subseteq X$ і точки $x \in X$ покладемо

$$\lambda_f(E) = \sup_{\substack{x',x''\in E\\ x'\neq x''}} \frac{|f(x') - f(x'')|_Y}{|x' - x''|_X} \text{ і } \lambda_f(x) = \inf_{U\text{- окіл } x} \lambda_f(U).$$

Функцію $\lambda_f : X \to [0, +\infty]$ називатимемо *ліпшицевою похідною* відображення f. Відображення f називається *ліпшицевим на* E, якщо $\lambda_f(E) < +\infty$. Казатимемо, що f — локально ліпшицеве на X, якщо для довільного $x \in X$ існує такий окіл U точки x, для якого f є ліпшицевим на U. Ясно, що f буде локально ліпшицевим тоді і тільки тоді, коли $\lambda_f(x) < +\infty$ при $x \in X$.

Введемо тепер поняття точкової ліпшицевості. Для метричних просторів X та Y і відображення $f : X \to Y$ визначимо функцію

$$l_f(x) = \inf_{U\text{- окіл } x} \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq x}} \frac{|f(u) - f(x)|_Y}{|u - x|_X} = \limsup_{u\to x} \frac{|f(u) - f(x)|_Y}{|u - x|_X}, \quad x \in X,$$

яку називатимемо *точковою ліпшицевою похідною*. Функція f називається *точково ліпшицевою*, якщо $l_f(x) < \infty$ для кожного $x \in X$.

Як відомо з [5, c.473], якщо відображення між нормованими просторами має неперервну похідну Ґато, то вона буде її похідною Фреше. Модифікуючи доведення цього результату, отримуємо наступний факт.

Твердження 2.1. *Нехай X — відкрита підмножина деякого нормованого простору $\widetilde{X}$, Y — нормований простір, і відображення $f : X \to Y$ має локально обмежену за нормою похідну за Ґато f'. Тоді $\lambda_f(x) = \limsup\limits_{u \to x} \|f'(u)\|$ при $x \in X$, і тому f — локально ліпшицева. Якщо ж f — неперервно диференційовна, то $\lambda_f(x) = \|f'(x)\|$ при $x \in X$.*

Доведення. Візьмемо деяку точку $x \in X$ і позначимо $\alpha = \limsup\limits_{u \to x} \|f'(u)\|$. Зафіксуємо деяке число $\gamma > \alpha$. Тоді існує опуклий окіл U точки x, такий що $\|f'(u)\| \le \gamma$ при $u \in U$. Покажемо, що $\lambda_f(U) \le \gamma$. Візьмемо дві точки $u_1, u_2 \in U$ і деякий функціонал $y^* \in Y^*$ з $\|y^*\| = 1$. Розглянемо числову функцію

$$g(t) = y^* f\big(u_1 + t(u_2 - u_1)\big), \quad t \in [0, 1].$$

Оскільки f — диференційовна за Ґато, то g — також диференційовна і

$$g'(t) = y^* f'\big(u_1 + t(u_2 - u_1)\big)(u_2 - u_1), \quad t \in [0, 1].$$

Тоді

$$|g'(t)| \le \|y^*\| \big\|f'\big(u_1 + t(u_2 - u_1)\big)\big\| \|u_2 - u_1\| \le \gamma \|u_2 - u_1\|$$

для кожного $t \in [0, 1]$, адже $u_1 + t(u_2 - u_1) \in U$. Далі, за формулою Лаґранжа матимемо, що

$$\big|y^*\big(f(u_2) - f(u_1)\big)\big| = |g(1) - g(0)| \le \gamma \|u_2 - u_1\|.$$

Таким чином, використовуючи відомий наслідок з теореми Гана-Банаха, одержуємо, що

$$\|f(u_2) - f(u_1)\| = \sup_{\|y^*\|=1} \big|y^*\big(f(u_2) - f(u_1)\big)\big| \le \gamma \|u_2 - u_1\|$$

для довільних $u_1, u_2 \in U$. Отже, $\lambda_f(U) \le \gamma$. Спрямувавши $\gamma \to \alpha$, одержуємо нерівність $\lambda_f(x) \le \alpha$.

Візьмемо тепер $\gamma < \alpha$. Розглянемо деякий відкритий окіл U точки x в X. Тоді $\sup\limits_{u \in U} \|f'(u)\| \ge \alpha > \gamma$. Отже, існує таке $u_0 \in U$, для якого $\|f'(u_0)\| > \gamma$. Візьмемо $\varepsilon > 0$, для якого $B(u_0, \varepsilon) \subseteq U$. З означення норми у спряженому просторі матимемо, що $\|f'(u_0)e\| > \gamma$ для деякого $e \in \widetilde{X}$ з $\|e\| = 1$. Таким чином,

$$\gamma < \|f'(u_0)e\| = \lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \|f(u_0 + te) - f(u_0)\|.$$

Тоді існує таке додатне $t < \varepsilon$, для якого $\frac{1}{t}\|f(u_0 + te) - f(u_0)\| > \gamma$. Покладемо $u_1 = u_0 + te$. Оскільки $u_0, u_1 \in U$ то

$$\lambda_f(U) \ge \frac{\|f(u_1) - f(u_0)\|}{\|u_1 - u_0\|} = \frac{1}{t} \|f(u_1) - f(u_0)\| > \gamma.$$

Таким чином, $\lambda_f(x) \ge \gamma$. Спрямувавши $\gamma \to \alpha$, будемо мати, що $\lambda_f(x) \ge \alpha$. □

Ще простіше доводиться наступний факт.

Твердження 2.2. *Нехай X — відкрита підмножина деякого нормованого простору $\widetilde{X}$, Y — нормований простір, відображення $f : X \to Y$ — диференційовне за Фреше і f' — її похідна Фреше. Тоді $l_f(x) = \|f'(x)\|$, $x \in X$. Зокрема, f — точково ліпшицева.*

Доведення. Справді, при $x \in X$ матимемо, що з одного боку,

$$l_f(x) = \limsup_{u \to x} \frac{\|f(u) - f(x)\|}{\|u - x\|} = \limsup_{u \to x} \frac{\|f'(x)(u - x) + o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} \leq$$

$$\limsup_{u \to x} \frac{\|f'(x)\|\|(u - x)\| + \|o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} = \|f'(x)\|,$$

а з іншого боку,

$$l_f(x) = \limsup_{u \to x} \frac{\|f(u) - f(x)\|}{\|u - x\|} = \limsup_{u \to x} \frac{\|f'(x)(u - x) + o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} \geq$$

$$\limsup_{u \to x} \frac{\|f'(x)\|\|(u - x)\| - \|o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} = \|f'(x)\|.$$

Отже, $l_f(x) = \|f'(x)\|$. □

3 Локальні властивості функцій і P-регулярні простори

Нехай X, Y, Z — топологічні простори, P — деяка властивість Z-значних функцій на X, а Q — деяка властивість Z-значних функцій на Y. Казатимемо, що функція $f : X \times Y \to Z$ має властивість PQ, якщо для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ функція f_y має властивість P, а функція f^x має властивість Q (як звичайно, функції $f_y : X \to Z$ та $f^x : Y \to Z$ визначаються формулою $f_y(x) = f^x(y) = f(x, y)$). Функції, що мають властивість P, ми коротше називатимемо називатимемо P-*функціями*. Сукупність усіх P-функцій $f : X \to Z$ позначатимемо $P(X, Z)$.

Нехай P — деяка властивість Z-значних функцій f, які визначені на відкритих підмножинах X. Ми кажемо, що P — *локальна властивість*, якщо для довільних $G \subseteq X$ і $f : G \to \mathbb{R}$ виконується, що f є P-функцією тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої множини $H \subseteq G$ звуження $f|_H$ є P-функцією.

В цій роботі ми будемо використовувати наступні локальні властивості:

- C — неперервність;
- L — точкова ліпшицевість;
- $\mathcal{L}$ — локальна ліпшицевість;
- D — диференційовність за Ґато;
- $\mathcal{D}$ — диференційовність за Фреше;
- C^1 — неперервна диференційовність.

Властивості, пов'язані з ліпшицевістю, стосуються метричних просторів, а властивості, пов'язані з диференційовністю, стосуються нормованих просторів. Для властивості C^1 ми не вказуємо, яка диференційовність мається на увазі, адже, неперервна диференційовність за Ґато рівносильна неперервній диференційовності за Фреше [5, с. 473].

Нехай X — топологічний простір і P — деяка властивість дійсних функцій на X. Казатимемо, що X є *P-регулярним*, якщо для довільної точки $a \in X$ і її околу U існує P-функція $f : X \to [0,1]$, така що $f(a) = 1$ і $f(x) = 0$ при $x \in X \setminus U$. Казатимемо, що властивість P є *однорідною*, якщо для довільної P-функції f і числа $\alpha \in \mathbb{R}$ функція αf має властивість P.

Твердження 3.1. *Кожний метричний простір є $\mathcal{L}$-регулярним.*

Доведення. Функція $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$, яка визначається формулою

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

є ліпшицевою, причому $\varphi(0) = 1$ і $\mathrm{supp}\varphi = (-1,1)$. Тоді для метричного простору X, точки $a \in X$ і числа $\varepsilon > 0$ матимемо, що для функції $f : X \to [0,1]$, яка визначена формулою $f(x) = \varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}|x-a|_X\big)$, $x \in X$, виконується, що $f(a) = 1$ і $\mathrm{supp} f = B(a,\varepsilon)$. Крім того, оскільки $\big||x'-a|_X - |x''-a|_X\big| \leq |x'-x''|_X$, то відображення $x \mapsto |x-a|_X$ є ліпшицевим. Тому f — ліпшицева, а значить, і локально ліпшицева. □

Нехай P — деяка властивість дійсних функцій. Казатимемо, що нормований простір X є *P-згладжуваним*, якщо на ньому є така еквівалентна норма, яка має властивість P на $X \setminus \{0\}$.

Твердження 3.2. *Нехай P — це одна із властивостей D, $\mathcal{D}$ чи C^1 і X — відкрита підмножина P-згладжуваного нормованого простору $\widetilde{X}$. Тоді X є P-регулярним.*

Доведення. Добре відомо, що функція φ, яка визначається формулою

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

є неперервно (навіть нескінченно) диференційовною, причому $\varphi'(0) = 0$. Оскільки диференційовність відносно еквівалентних норм рівносильна, то вважатимемо, що вихідна норма $\|\cdot\|$ має властивість P на $\widetilde{X} \setminus \{0\}$. Покажемо, що і функція $f(x) = \varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big)$, $x \in \widetilde{X}$, має властивість P на всьому $\widetilde{X}$. По-перше, оскільки $\varphi(t) - \varphi(0) = o(t)$ при $t \to 0$, то $f(x) - f(a) = \varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big) - \varphi(0) = o(\|x-a\|)$ при $x \to a$. Таким чином, похідна Фреше функції f в точці a рівна нулю. Нехай p_x — похідна від норми в точці x. Оскільки для довільного $e \in \widetilde{X}$ маємо, що

$$|p_x(x)| = \lim_{t \to +0} \frac{1}{t}\big|\|x+te\| - \|x\|\big| \leq \|e\|,$$

то $\|p_x\| \leq 1$. Але $f'(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi'\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big)p_{x-a}$. Тому $\|f'(x)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\varphi'\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big) \to 0 = f'(0)$ при $x \to a$. Таким чином, похідна (Ґато чи Фреше) функції f неперервна в точці a. □

За допомогою тензорного добутку функцій одержується наступний результат.

Твердження 3.3. *Нехай P та Q — деякі однорідні властивості дійснозначних функцій, які сильніші за неперервність, X — P-регулярний метричний простір, а Y — Q-регулярний метричний простір, тоді $X \times Y$ є $PQ \wedge C$-регулярним.*

Доведення. Нехай (a, b) — деяка точка з $X \times Y$ і W — деякий її окіл. Візьмемо такі околи U точки a і V точки b, що $U \times V \subseteq W$. Тоді існують P-функція $f : X \to [0, 1]$ і Q-функція $g : Y \to [0, 1]$, такі що $f(a) = g(b) = 1$ і $f(x) = g(y) = 0$ при $x \in X \setminus U$ і $y \in Y \setminus V$. Визначемо функцію $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ формулою $h(x, y) = f(x)g(y)$. Оскільки $h^x = f(x)g$ і $h_y = g(y)f$, то з однорідності властивостей P та Q випливає, що h є PQ-функцією. Крім того, h очевидним чином є неперервною, $h(a, b) = f(a)g(b) = 1$ і $h(x, y) = f(x)g(y) = 0$ при $(x, y) \notin U \times V$. □

4 Необхідні умови на множину точок розриву $C\mathcal{L}$- і $\mathcal{LL}$-функцій

Нехай X та Y — топологічні простори і $E, M \subseteq X \times Y$. Ми кажемо, що M є *h-околом /v-околом/* множини E, якщо для довільної точки $(x, y) \in E$ існує такий окіл U точки x /V точки y/, що $U \times \{y\} \subseteq M$ /відповідно, $\{x\} \times V \subseteq M$/. Якщо M є h-околом /v-околом/ замикання $\overline{E}$, то казатимемо, що M є $\overline{h}$-околом множини E. І нарешті, множина M називається *hv-околом* , *$\overline{h}v$-околом*, *$h\overline{v}$-околом*, *$\overline{hv}$-околом* множини E, якщо вона є відповідно h- чи $\overline{h}$-околом E і v- чи $\overline{v}$-околом E. Множина E називається h- /v-, hv-, $\overline{h}v$-, $h\overline{v}$-, $\overline{hv}$-/ *ніде не щільною*, якщо існує така ніде не щільна множина M, яка є h- /v-, hv-, $\overline{h}v$-, $h\overline{v}$-, $\overline{hv}$-/ околом множини E. hv-окіл інакше називається *хрестом-околом*, а hv-ніде не щільна множина — *навхрест ніде не щільною*.

Лема 4.1. *Нехай X — топологічний простір, Y, Z — метричні простори, $\gamma > 0$, A — щільна в X і $f : X \times Y \to Z$ — неперервна відносно першої змінної функція, для якої $\lambda_{f^x}(Y) \le \gamma$ при $x \in A$. Тоді f — неперервна.*

Доведення. По-перше, оскільки f — неперервна відносно першої змінної, то для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ матимемо, що

$$|f(x, y') - f(x, y'')|_Z = \lim_{A \ni u \to x} |f^u(y') - f^u(y'')|_Z \le \lim_{A \ni u \to x} \lambda_{f^u}(Y)|y' - y''|_Y \le \gamma|y' - y''|_Y.$$

Перевіримо тепер, що f — неперервна. Візьмемо $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки f — неперервна відносно першої змінної, то існує такий окіл U точки x_0, для якого $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|_Z < \frac{\varepsilon}{2}$ при $x \in U$. Нехай $V = B\big(y_0, \frac{\varepsilon}{2\gamma}\big)$. Тоді при $x \in U$ і $y \in V$ матимемо, що

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)|_Z \le |f(x, y) - f(x, y_0)|_Z + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|_Z \le$$

$$\gamma|y - y_0|_Y + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\gamma\varepsilon}{2\gamma} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, f — неперервна в точці (x_0, y_0). □

Лема 4.2. *Нехай X — топологічний простір, Y, Z — метричні простори, V — відкрита в Y, $\gamma > 0$ і функція $f : X \times Y \to Z$ — неперервна відносно першої змінної. Тоді множина*

$$A_\gamma(V) = \big\{x \in \mathrm{pr}_X\big(\overline{D(f)} \cap (X \times V)\big) : \lambda_{f^x}(V) \le \gamma\big\}$$

є ніде не щільною в X.

Доведення. Нехай $U = \mathrm{int}\overline{A_\gamma(V)}$ і $A = U \cap A_\gamma(V)$. Припустимо, що $U \neq \varnothing$. Тоді, оскільки $\overline{A} \supseteq U$, то за лемою 4.1 функція f буде неперервна на $U \times V$. Але це неможливо, адже $(U \times V) \cap D(f) \neq \varnothing$. Таким чином, $U = \varnothing$, а значить, $A_\gamma(V)$ — ніде не щільна. □

Лема 4.3. *Нехай X — берівський топологічний простір, Y, Z — метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ — $C\mathcal{L}$-функція. Тоді множина $D(f)$ є hv-ніде не щільною.*

Доведення. Перевіримо спочатку ніде не щільність множини $D(f)$. Нехай $D(f)$ не є ніде не щільною. Тоді існують такі відкриті непорожні множини $U_0 \subseteq X$ і $V_0 \subseteq Y$, що $U_0 \times V_0 \subseteq \overline{D(f)}$. Візьмемо деяке $y_0 \in V_0$ і покладемо $V_n = V_0 \cap B(y_0, \frac{1}{n})$. За лемою 4.2 множини $A_{m,n} = A_m(V_n)$ — ніде не щільні. Зафіксуємо деяке $x \in U_0$. Оскільки $\lambda_{f^x}(y_0) < +\infty$, то існує номер $m > \lambda_{f^x}(y_0)$. Далі, знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого $\lambda_{f^x}(V_n) < m$. Але $(x, y_0) \in U_0 \times V_0 \subseteq \overline{D(f)}$. Тому $x \in A_{m,n}$. Таким чином, $U_0 \subseteq \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$, що суперечить беровості X.

Тепер, оскільки f є нарізно неперервною, то з [6, Theorem 6.4, Proposition 6.2] випливає, що $D(f)$ є σ-навхрест ніде не щільною (тобто подається у вигляді зліченного об'єднання навхрест ніде не щільних множин). Крім того, там показано, що довільна ніде не щільна і σ-навхрест ніде не щільна множина в добутку метризовних просторів є навхрест ніде не щільною [6, Proposition 6.3]. Таким чином, множина $D(f)$ є навхрест ніде не щільною. □

Теорема 3. *Нехай X — берівський топологічний простір, Y, Z — метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ — $C\mathcal{L}$-функція. Тоді множина $D(f)$ є $h\overline{v}$-ніде не щільною.*

Доведення. За лемою 4.3 множина $D(f)$ є hv-ніде не щільною. Тому залишається перевірити $\overline{v}$-ніде не щільність множини $D(f)$.

За теоремою Стоуна [4, с.414] існує локально скінченне покриття $\mathcal{V}_n$ простору Y, що вписане в покриття Y кулями радіуса $\frac{1}{2n}$. Тоді для кожного $V \in \mathcal{V}_n$ матимемо, що $\mathrm{diam}V \le \frac{1}{n}$. Покладемо $M_n = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}_n} \big(A_n(V) \times V\big)$ і $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. За лемою 4.2 множини $A_n(V)$ — ніде не щільні. Тому за рахунок локальної скінченності $\mathcal{V}_n$ матимемо, що M_n — ніде не щільні.

Покажемо, що M — ніде не щільна. Нехай G_0 — деяка відкрита непорожня підмножина $X \times Y$. Але за лемою 4.3 множина $D(f)$ — ніде не щільна. Тому існують відкриті непорожні множини $U_0 \subseteq X$ і $V_0 \subseteq Y$, такі, що $U_0 \times V_0 \subseteq G_0 \setminus \overline{D(f)}$. Візьмемо деяке $y_0 \in V_0$ і знайдемо такий номер m, для якого $B(y_0, \frac{2}{m}) \subseteq V_0$. Нехай $V_1 = B(x, \frac{1}{m})$ і $G_1 = U_0 \times V_1$.

Покажемо, що $G_1 \cap M_n = \varnothing$ при $n > m$. Справді, нехай $G_1 \cap M_n \neq \varnothing$. Візьмемо $(x_1, y_1) \in G_1 \cap M_n$. Тоді існує $V \in \mathcal{V}_n$, таке що $(x_1, y_1) \in A_n(V) \times V$. Значить,

$x_1 \in A_n(V) \subseteq \mathrm{pr}_X\big(\overline{D(f)} \cap (X \times V)\big)$. Отже, існує $y_2 \in V$, для якого $(x_1, y_2) \in \overline{D(f)}$. Тоді $y_2 \notin B(y_0, \frac{2}{m})$, адже $\big(U_0 \times B(y_0, \frac{2}{m})\big) \cap \overline{D(f)} = \varnothing$. Тому $|y_2 - y_0|_Y \geq \frac{2}{m}$. Врахувавши, що $|y_0 - y_1|_Y \leq \frac{1}{m}$, матимемо, що $\frac{1}{m} \leq |y_2 - y_1|_Y \leq \mathrm{diam} V \leq \frac{1}{n}$. Таким чином, $n \leq m$.

Тепер, користуючись ніде не щільністю множин M_n матимемо, що відкрита множина $G_2 = G_1 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{m} \overline{M}_n$ — непорожня, причому $G_2 \cap M_n = \varnothing$ для кожного n. Тому $G_2 \subseteq G_0 \setminus M$. Отже, M — ніде не щільна.

Доведемо, що M є v-околом множини $\overline{D(f)}$. Візьмемо $(x_0, y_0) \in \overline{D(f)}$. Оскільки $\lambda_{f^{x_0}}(y_0) < +\infty$, то існує номер $n_0 > \lambda_{f^{x_0}}(y_0)$. Далі візьмемо $n_1 > n_0$, для якого $\lambda_{f^{x_0}}\big(B(y_0, \frac{1}{n_1})\big) < n_0$. Покладемо $n = \max\{n_0, n_1\}$. Оскільки $\mathcal{V}_n$ покривають Y, то існує $V \in \mathcal{V}_n$, для якого $y_0 \in V$. Але $\mathrm{diam} V < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1}$. Тому $V \subseteq B(y_0, \frac{1}{n_1})$. Отже, $\lambda_{f^{x_0}}(V) < n$. Таким чином, $\{x_0\} \times V \subseteq M_n \subseteq M$. □

Наслідок 4.1. *Нехай X, Y, Z — метричні простори, причому X та Y – берівські, і $f : X \times Y \to Z$ — $\mathcal{LL}$-функція. Тоді множина $D(f)$ є $\overline{hv}$-ніде не щільною.*

5 Побудова функцій з даним коливанням

Для функції $f : X \to \overline{R}$ *верхня та нижня граничні функції* $f^\vee, f^\wedge : X \to \overline{R}$ визначаються формулами

$$f^\vee(x) = \limsup_{u \to x} f(u), \quad f^\wedge(x) = \liminf_{u \to x} f(u), \quad x \in X.$$

Як відомо, коливання функції $f : X \to \mathbb{R}$ обчислюється за формулою $\omega_f = f^\vee - f^\wedge$.

Підмножину S метричного простору X називатимемо *ε-відокремною*, якщо нерівність $|s - t|_X \geq \varepsilon$ виконується для довільних різних точок $s, t \in S$. Казатимемо, що S — *відокремна*, якщо вона є ε-відокремною для деякого $\varepsilon > 0$. Множину S називатимемо *σ-дискретною*, якщо існує послідовність дискретних множин S_n, така що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Лема 5.1. *Нехай X — метричний простір і $E \subseteq X$. Тоді існує σ-дискретна множина $S \subseteq E$, така що $\overline{S} \supseteq E$.*

Доведення. Ясно, що ε-відокремність — це властивість скінченного характеру. Тому за лемою Тейхмюллера-Тьюкі [4, с. 12] для кожного номера n існує максимальна $\frac{1}{n}$-відокремна підмножина S_n множини E. За рахунок максимальності матимемо, що для довільного номера n і точки $x \in E$ існує $s \in S_n$, таке що $|x - s|_X < \frac{1}{n}$. Таким чином, σ-дискретна множина $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ буде щільною в E. □

В попередній лемі σ-дискретна множина подається у вигляді зліченного об'єднання відокремних множин. Проте виявляється, що таку властивість мають всі σ-дискретні множини.

Лема 5.2. *Нехай X — метричний простір і S — σ-дискретна підмножина X. Тоді існує диз'юнктна послідовність відокремних множин T_n, така що $S = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$.*

Доведення. Застосовуючи міркування леми 5.1 до деякої дискретної множини E, побудуємо послідовність відокремних множин, об'єднання яких щільне в E, а значить, і рівне E. Таким чином, і для σ-дискретної множини S існує послідовність деяких відокремних підмножин S_n, така що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Покладаючи $T_n = S_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} S_k$, матимемо, що T_n — відокремні і $S = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. □

Лема 5.3. *Нехай X — метричний простір і $g : X \to [0, +\infty]$ — деяка напівнеперервна зверху функція. Тоді існує функція $h : X \to [0, +\infty]$ з σ-дискретним носієм, така що $h^\vee = g$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$. Для кожного $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ покладемо $F_\varepsilon = f^{-1}([\varepsilon, +\infty])$. Оскільки функція f — напівнеперервна зверху, то множини F_ε — замкнені. За лемою 5.1 для кожного $\varepsilon > 0$ виберемо σ-дискретну множину S_ε, таку що $\overline{S}_\varepsilon = F_\varepsilon$. Покладемо $S = \bigcup\limits_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} S_\varepsilon$ і $h = g\chi_S$, де χ_S — характеристична функція множини S. Покажемо, що h — шукана. По-перше, носій функції h рівний S і тому він є σ-дискретним. Далі, оскільки $h \leq g$ і g — напівнеперервна зверху, то $h^\vee \leq g^\vee = g$.

Залишилось довести, що $h^\vee \geq g$. Нехай це не так і для деякого $x_0 \in X$ виконується, що $h^\vee(x_0) < g(x_0)$. Візьмемо $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, таке що $h^\vee(x_0) < \varepsilon < g(x_0)$. Тоді $x_0 \in F_\varepsilon$. З іншого боку, існує окіл U точки x_0, такий що $h(x) < \varepsilon$ при $x \in U$. Але $x_0 \in F_\varepsilon = \overline{S}_\varepsilon$. Тому існує $s \in S_\varepsilon \cap U$. Тоді $h(s) = g(s) \geq \varepsilon$, що неможливо. □

Лема 5.4. *Нехай X — метричний простір, G — відкрита підмножина X і S — σ-дискретна підмножина X, така що $S \subseteq \overline{G} \setminus G$. Тоді існує сім'я $\left(U_n^s\right)_{s \in S, n \in \mathbb{N}}$ відкритих непорожніх підмножин G, для якої виконуються наступні властивості*

(i) $\overline{U_n^s} \subseteq G$ при $s \in S$ та $n \in \mathbb{N}$;

(ii) для довільного $s \in S$ виконується, що $U_n^s \to s$ при $n \to \infty$;

(iii) для довільної множини $T \subseteq S$ сім'я $\left(U_n^t\right)_{t \in T, n \in \mathbb{N}}$ — дискретна на $X \setminus \overline{T}$.

Доведення. За лемою 5.2 існують відокремні множини T_k, такі що $S = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k$. Нехай множини T_k є $3\varepsilon_k$-відокремні, причому не буде обмеженням вважати, що $\varepsilon_k < 1$ і $\varepsilon_k \downarrow 0$. Покладемо $S_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} T_j$. Зараз ми індукцією по k визначимо сім'ї $\left(U_n^t\right)_{t \in T_k, n \in \mathbb{N}}$ відкритих непорожніх множин так, щоб виконувались наступні властивості:

$$\overline{U_n^t} \subseteq G \cap B(t, \tfrac{\varepsilon_k}{n}) \text{ при } t \in T_k \text{ і } n \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

$$\text{сім'я } \left(\overline{U_n^s}\right)_{s \in S_k, n \in \mathbb{N}} \text{ — диз'юнктна.} \tag{2}$$

Припустимо, що для деякого $k \in \mathbb{N}$ при $j < k$ уже визначені сім'ї $\left(U_n^t\right)_{t \in T_j, n \in \mathbb{N}}$ так, що виконуються властивості аналогічні до (1) та (2). Візьмемо $t \in T_k$ і побудуємо множини U_n^t. Оскільки відокремні множини є замкненими, то множина S_{k-1} також є замкненою. Тоді існує $\varepsilon > 0$, для якого $B(t, 2\varepsilon) \cap S_{k-1} = \varnothing$. Значить, за рахунок (1), $B(t, \varepsilon) \cap U_n^s = \varnothing$

при $s \in S_{k-1}$ і $\frac{1}{n} < \varepsilon$, адже $\varepsilon_j < 1$. Врахувавши, що сім'ї $\big(B(t,\varepsilon_j)\big)_{s\in T_j}$ — дискретні при $j<k$ і використавши (1) матимемо, що сім'я $\big(U_n^s\big)_{t\in S_{k-1}, n\le\frac{1}{\varepsilon}}$ — локально скінченна. Тому

$$B(t,\varepsilon) \cap \overline{\bigcup_{s\in S_{k-1}} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^s} \subseteq \overline{\bigcup_{s\in S_{k-1}} \bigcup_{n\le\frac{1}{\varepsilon}} U_n^s} = \bigcup_{s\in S_{k-1}} \bigcup_{n\le\frac{1}{\varepsilon}} \overline{U_n^s} \subseteq G \not\ni t$$

Отже, множина $U = X \setminus \overline{\bigcup\limits_{s\in S_{k-1}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n^s}$ є околом точки e. Тому для множини $H = G \cap U$ матимемо, що $t \in \overline{H}$. Залишилось, індукцією по n побудувати послідовність відкритих непорожніх множин U_n^t так, щоб $\overline{U_n^t} \subseteq H \cap B(t, \frac{\varepsilon_k}{n})$ і послідовність $\big(\overline{U_n^t}\big)_{n=1}^{\infty}$ була би диз'юнктною.

Доведемо, що побудована сім'я $\big(U_n^s\big)_{s\in S, n\in\mathbb{N}}$ є шуканою. По-перше, з властивостей (1_k) випливають властивості (i) та (ii). Перевіримо (iii). Візьмемо $T \subseteq S$ і точку $x \in X \setminus \overline{T}$. Зуважимо, що з властивостей (2_k) випливає, що сім'я $\big(\overline{U_n^t}\big)_{t\in T, n\in\mathbb{N}}$ — диз'юнктна. Тому достатньо перевірити локальну скінченність сім'ї $\big(U_n^t\big)_{t\in T, n\in\mathbb{N}}$ в точці x. Для цього візьмемо таке $\varepsilon > 0$, що $B(x, 2\varepsilon) \cap T = \varnothing$. Тоді за рахунок (1) матимемо, що при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконується, що $\frac{\varepsilon_k}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, а тому $U_n^t \cap B(x,\varepsilon) = \varnothing$ при $t \in T$. Далі, оскільки $\varepsilon_k \downarrow 0$, то існує k, для якого $\varepsilon_k < \varepsilon$. Тоді $B(x,\varepsilon) \cap U_n^t = \varnothing$ при $j \ge k$ і $t \in T \cap T_j$. Але сім'ї $\big(B(t,\varepsilon_j)\big)_{t\in T_j}$ — дискретні. Тому для довільних n та j сім'я $\big(U_n^t\big)_{t\in T_j}$ також є дискретною. Таким чином, сім'я $\big(U_n^t\big)_{t\in T, n\in\mathbb{N}}$ — локально скінченна в точці x. □

Лема 5.5. *Нехай P — деяка однорідна локальна властивість дійснозначних функцій, яка сильніша за неперервність, X — P-регулярний метричний простір, G — відкрита підмножина X і $g : X \to [0,+\infty]$ — така напівнеперервна зверху функція, що $E = \mathrm{supp} g \subseteq \overline{G} \setminus G$. Тоді існує функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $\omega_f = g$, $\mathrm{supp} f \subseteq G$ і звуження $f|_{X\setminus\overline{E}}$ є P-функцією.*

Доведення. Перш за все виберемо h за лемою 5.3 і покладемо $S = \mathrm{supp} h$. Тоді $S \subseteq \overline{E} \subseteq G \setminus \overline{G}$. Далі побудуємо сім'ю $\big(U_n^s\big)_{s\in S, n\in\mathbb{N}}$ за лемою 5.4. Для довільних $s \in S$ і $n \in \mathbb{N}$ виберемо деяку точку $a_n^s \in U_n^s$. Оскільки X є P-регулярним, то існує P-функція $\varphi_n^s : X \to \mathbb{R}$, така що $\varphi_n^s(a_n^s)) = 1$ і $\mathrm{supp}\varphi_n^s \subseteq U_n^s$. Далі, нехай $\lambda_n^s = \min\{n, h(s)\}$. Покладемо $f(x) = \sum\limits_{s\in S, n\in\mathbb{N}} \lambda_n^s \varphi_n^s(x)$, $x \in X$. Доведемо, що функція f шукана.

По-перше, $\mathrm{supp} f = \bigcup\limits_{s\in S, n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}\varphi_n^s \subseteq \bigcup\limits_{s\in S, n\in\mathbb{N}} U_n^s \subseteq G$. Далі, оскільки сім'я $\big(U_n^s\big)_{s\in S, n\in\mathbb{N}}$ — дискретна поза $\overline{S} \subseteq \overline{E}$, і властивість P є локальною та однорідною, то $f|_{X\setminus\overline{E}}$ є P-функцією. Залишилось довести, що $\omega_f = g$. Але $h^\vee = g$. Тому досить показати, що $h \le \omega_f \le g$. Оскільки P сильніша за неперервність, то f — неперервна на $X \setminus \overline{E}$. Тому $\omega_f(x) = 0 = g(x) = h(x)$ при $x \in X \setminus \overline{E}$. Зафіксуємо $x \in \overline{E}$. Тоді $f(x) = f^\wedge(x) = 0$. Отже, $\omega_f(x) = f^\vee(x)$. Тому досить довести, що $h(x) \le f^\vee(x) \le g(x)$.

Перевіримо спочатку нерівність $h(x) \le f^\vee(x)$. Якщо $x \notin S$, то $h(x) = 0 \le f^\vee(x)$. Нехай тепер $x \in S$. Тоді, оскільки $a_n^x \to x$, то

$$f^\vee(x) = \limsup_{u\to x} f(u) \ge \limsup_{n\to\infty} f(a_n^x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n^x = \lim_{n\to\infty} \min\{n, h(x)\} = h(x).$$

Доведемо тепер нерівність $f^{\vee}(x) \leq g(x)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки g — напівнеперервна зверху, то існує такий окіл U точки x, для якого $g(u) \leq g(x) + \varepsilon$ при $u \in U$. Нехай $T = S \setminus U$. Тоді сім'я $\left(U_n^t\right)_{t \in T, n \in \mathbb{N}}$ — дискретна в точці x. Але $\overline{U_n^t} \subseteq G \not\ni x$ при $t \in T$ і $n \in \mathbb{N}$. Тому існує окіл V точки x, такий що $V \subseteq U$ і $V \cap U_n^t = \varnothing$ при $t \in T$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $v \in V$ матимемо, що

$$f(v) \leq \sup_{s \in S \cap U, n \in \mathbb{N}} \lambda_n^s \leq \sup_{s \in S \cap U} h(s) \leq \sup h(U) \leq \sup g(U) \leq g(x) + \varepsilon.$$

Тоді $f^{\vee}(x) \leq \sup f(V) \leq g(x) + \varepsilon$. Спрямовуючи $\varepsilon \to 0$, одержимо потрібну нерівність. $\square$

Теорема 4. *Нехай P та Q — деякі локальні однорідні властивості дійснозначних функцій, які сильніші за неперервність, X — P-регулярний метричний простір, а Y — Q-регулярний метричний простір і $g : X \times Y \to [0, +\infty]$ — така напівнеперервна зверху функція, що її носій $\mathrm{supp} g$ є $\overline{hv}$-ніде не щільна. Тоді існує PQ-функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, така що $\omega_f = g$.*

Доведення. Нехай M — деякий ніде не щільний $\overline{hv}$-окіл множини $E = \mathrm{supp} g$ і $G = (X \times Y) \setminus \overline{M}$. Покладемо $P_0 = PQ \wedge C$. За лемою 3.3 добуток $X \times Y$ є P_0-регулярним. Застосовуючи лему 5.5 до властивості P_0, функції g і множини G, побудуємо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, таку що $\omega_f = g$, $\mathrm{supp} f \subseteq G$ і $f|_{(X \times Y) \setminus \overline{E}}$ — P_0-функція. Доведемо, що f є PQ-функцією.

Візьмемо $(x, y) \in X \times Y$ і покажемо, що f_y є P-функцією. Якщо $(x, y) \notin \overline{E}$, то звуження f на окіл $(X \times Y) \setminus \overline{E}$ точки (x, y) є P_0-функцією. Тому звуження f_y на деякий відкритий окіл точки x є P-функцією. Нехай тепер $(x, y) \in \overline{E}$. Оскільки M є $\overline{hv}$-околом $\overline{E}$, то існує відкритий окіл U точки x, для якого $U \times \{y\} \subseteq M$. Але f рівна нулю на M. Тому f_y рівне нулю на U. Але нульова функція має властивість P, адже P — однорідна властивість. Таким чином, для кожного $x \in X$ звуження f_y на деякий відкритий окіл точки x має властивість P. Отже, f_y є P-функцією, адже P — локальна властивість. Аналогічно доводимо, що f^x має властивість Q. $\square$

Теорема 5. *Нехай P — деяка локальна однорідна властивість дійснозначних функцій, яка сильніша за неперервність, X — метричний простір, а Y — P-регулярний метричний простір і $g : X \times Y \to [0, +\infty]$ — така напівнеперервна зверху функція,, що її носій $\mathrm{supp} g$ є $h\overline{v}$-ніде не щільним. Тоді існує CP-функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, така що $\omega_f = g$.*

Доведення. Нехай M — деякий ніде не щільний $h\overline{v}$-окіл множини $E = \mathrm{supp} g$ і $G = (X \times Y) \setminus \overline{M}$. Покладемо $P_0 = CP \wedge C$. За лемою 3.3 добуток $X \times Y$ є P_0-регулярним. Застосовуючи лему 5.5 до властивості P_0, функції g і множини G, побудуємо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, таку що $\omega_f = g$, $\mathrm{supp} f \subseteq G$ і $f|_{(X \times Y) \setminus \overline{E}}$ — P_0-функція. Доведемо, що f є CP-функцією.

Візьмемо $(x, y) \in X \times Y$ і покажемо, що f^x є P-функцією. Якщо $(x, y) \notin \overline{E}$, то звуження f на окіл $(X \times Y) \setminus \overline{E}$ точки (x, y) є P_0-функцією. Тому звуження f^x на деякий відкритий окіл точки y є P-функцією. Нехай тепер $(x, y) \in \overline{E}$. Оскільки M є $h\overline{v}$-околом $\overline{E}$, то існує відкритий окіл V точки y, для якого $\{x\} \times V \subseteq M$. Але f рівна нулю на M. Тому f^x рівне нулю на V. Але нульова функція має властивість P, адже P — однорідна властивість. Таким чином, для кожного $x \in X$ звуження f^x на деякий відкритий окіл точки y має властивість P. Отже, f_y є P-функцією, адже P — локальна властивість.

Доведемо, що f_y — неперервне в точці x. Якщо $(x,y) \notin E$, то $\omega_f(x,y)=g(x,y)=0$. Отже, f — неперервна в точці (x,y). А тому f_y — неперервне в точці x. Нехай тепер $(x,y) \in E$. Оскільки M є $h\overline{v}$-околом множини E, то існує такий окіл U точки x, для якого $U \times \{y\} \subseteq M$. Тоді функція f_y рівна нулю на U, а значить, вона неперервна в точці x. $\square$

Література

1. Герасимчук В.Г. Розриви і коливання нарізно диференційовних функцій: Дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01. /Василь Григорович Герасимчук. – Чернівці, 2008. – 122с.
2. Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К. Михайлюк В.В. *Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута. – №134. – 2002. – С.22–29.
3. Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Характеризація коливань нарізно локально ліпшицевих функцій* // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу" присв. 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (30 вересня – 3 жовтня). – Чернівці, 2010. – С.56–57.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элеметны теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.
6. Maslyuchenko O.V. *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces*, Houston Journal of Mathematics, **35**, 1 (2009), 113–130.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 05.02.2011

Herasymchuk V.H., Maslyuchenko O.V. *The oscillation of separately locally Lipschitz functions*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 22–33.

We prove that a function which defined on the product of two metric Baire spaces is the oscillation of some separately locally Lipschitz function if and only if it is an upper semi-continuous non-negative function which has a crosswise nowhere dense closure of its support.

Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Колебания раздельно локально липшицевых функций* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 22–33.

Доказано, что функция, которая определена на произведении двух бэровских метрических пространств, является колебанием некоторой раздельно локально липшицевой функции тогда и только тогда, когда она неотрицательна полунепрерывна сверху и замыкание ее носителя накрест нигде не плотно.