Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.51

Карлова О.

РОЗКЛАДНІ І ФУНКЦІОНАЛЬНО ДВОСТОРОННІ МНОЖИНИ

Карлова О. *Розкладні і функціонально двосторонні множини* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 71–76.

Доведено, що кожна двостороння підмножина спадково берівського простору розкладна. Встановлено, що розкладна множина $A \subseteq X$ є двосторонньою, у випадку, коли (i) X — досконалий паракомпакт, або (ii) A і $X \setminus A$ — ліндeлефові, а X — цілком регулярний.

Вступ

Підмножину A топологічного простору X ми називаємо

- *функціональною G_δ-множиною* або *множиною типу G^*_δ*, якщо множина A є перетином послідовності функціонально відкритих множин в X;
- *функціональною F_σ-множиною* або *множиною типу F^*_σ*, якщо множина A є об'єднанням послідовності функціонально замкнених множин в X;
- *(функціонально) двосторонньою* в X, якщо A є одночасно (функціональною) G_δ- і (функціональною) F_σ-множиною в X;
- *розкладною*, якщо для довільної непорожньої замкненої в X множини F множина $\overline{F \cap A} \cap \overline{F \setminus A}$ є ніде не щільною в F.

Зрозуміло, що в досконало нормальному просторі множина є типу F_σ $/G_\delta/$ тоді і тільки тоді, коли вона є функціональною F_σ-множиною $/G_\delta$-множиною$/$.

Розкладні і функціонально двосторонні множини відіграють важливу роль при вивченні властивостей характеристичних функцій. Так, відомо, що характеристична функція множини $A \subseteq X$ належить до першого класу Бера тоді і тільки тоді, коли A є функціонально двосторонньою множиною (див., наприклад, [2]). Крім того, характеристична функція множини $A \subseteq X$ є точково розривною на довільній замкненій

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54H05, 54C50.

Ключові слова і фрази: розкладна множина, функціонально двостороння множина.

множині (тобто, звуження цієї функції на довільну замкнену множину має точку неперервності), тоді і тільки тоді, коли множина A розкладна [3, с. 115].

Ф. Гаусдорф [4, с. 462] показав, що кожна двостороння підмножина повного метричного простору є розкладною. К. Куратовський [5] і Д. Монтґомері [7] з допомогою так званої $\mathcal{M}$-операції встановили, що кожна розкладна підмножина метризовного простору є двосторонньою, а в роботах Е. Майкла [6] та К. Наґамі [8] цей факт був доведений з використанням паракомпактності метризовного простору.

В цій статті ми розглядаємо розкладні і функціонально двосторонні підмножини неметризовних просторів.

1 Локально F_σ^*- і G_δ^*-множини

Означення 1.1. *Підмножина A топологічного простору X є локально F_σ^*- $/G_\delta^*$-/ в точці x, якщо існує такий відкритий окіл U точки x в X, що $U \cap A$ є множиною типу F_σ^* $/G_\delta^*/$ в просторі X.*

Зауважимо, що якщо X — метризовний простір і $A \subseteq X$ є локально F_σ-множиною $/G_\delta$-множиною/ в кожній своїй точці, то A є типу F_σ $/G_\delta/$ в X (див. [3, с. 366]).

Означення 1.2. *F_σ^*-ядром $/G_\delta^*$-ядром/ множини A ми називаємо сукупність всіх точок множини A, в яких вона є локально типу F_σ^* $/G_\delta^*/$, і позначаємо через $F_\sigma^*(A)$ $/G_\delta^*(A)/$.*

Зрозуміло, що $F_\sigma^*(A) \subseteq A$ $/G_\delta^*(A) \subseteq A/$ для будь-якої множини A.

Твердження 1.1. *Нехай A — ліндeлефовий підпростір топологічного простору X, такий, що $F_\sigma^*(A) = A$. Тоді множина A є типу F_σ^* в X.*

Доведення. Оскільки $A \subseteq F_\sigma^*(A)$, то $A \subseteq \bigcup\limits_{x\in A} U_x$, де U_x — відкритий окіл точки $x \in A$, такий, що $U_x \cap A$ є F_σ^*-множиною в X. З ліндeлефовості множини A випливає, що існує така послідовність точок $x_n \in A$, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U_{x_n} \cap A)$. Очевидно, що тоді множина A є типу F_σ^* в X. □

Твердження 1.2. *Нехай A — ліндeлефовий підпростір цілком регулярного простору X, такий, що $G_\delta^*(A) = A$. Тоді множина A є типу G_δ^* в X.*

Доведення. Для кожної точки $x \in A$ виберемо такий відкритий окіл U_x точки x, що $U_x \cap A$ є множиною типу G_δ^* в X. Оскільки X цілком регулярний, то для всіх $x \in A$ існує такий функціонально відкритий окіл W_x точки x, що $W_x \subseteq U_x$. З ліндeлефовості множини A випливає, що існує така послідовність точок $x_n \in A$, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (W_{x_n} \cap A)$. Оскільки $W_{x_n} \cap A = U_{x_n} \cap A \cap W_{x_n}$, то множина $W_{x_n} \cap A$ є типу G_δ^* в X для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_{x_n}$. Зауважимо, що множина G є функціонально відкритою в X. Тоді з рівностей

$$A = A \cap G = G \setminus (G \setminus A) = G \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{x_n} \setminus A) = G \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (W_{x_n} \setminus (W_{x_n} \cap A)))$$

випливає, що множина A є типу G_δ^* в X. □

Наступний приклад показує, що умова лінделефовості множини A в твердженнях 1.1 і 1.2 не може бути послаблена до паракомпактності.

Приклад 1. *Існує метризовний підпростір A компактного гаусдорфового простору X, який є типу F_σ^* і G_δ^* в кожній своїй точці, але не є ні типу F_σ^*, ні типу G_δ^* в X.*

Доведення. Візьмемо в ролі простору X подвійне коло Александрова [1, с. 405], тобто множину $X = C_1 \cup C_2$, де $C_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = i\}$ при $i = 1, 2$, з наступною топологією. Базисним околом точки $p \in C_2$ є множина $\{p\}$, а базу околів точки $p \in C_1$ утворюють множини вигляду $U_\varepsilon(p) = V_\varepsilon(p) \cup \pi(V_\varepsilon(p) \setminus \{p\})$, де $V_\varepsilon(p)$ — це дуга довжини ε кола C_1 з серединою в точці p, а π — це відображення проектування кола C_1 на коло C_2 з точки $(0,0)$. Простір X з такою топологією є компактним гаусдорфовим простором.

Нехай $A = C_2$. Оскільки A – незліченний дискретний підпростір простору X, то він є паракомпактним і не є лінделефовим. Для будь-якої точки $p \in A$ множина $U = \{p\}$ є відкритим околом цієї точки, причому $U \cap A = \{p\}$ є функціонально замкненою множиною в X, оскільки X є нормальним простором з першою аксіомою зліченності. Таким чином, $A \subseteq F_\sigma^*(A) \cap G_\delta^*(A)$.

Покажемо, що множина A не є типу F_σ в X. Справді, припустимо, що існує послідовність замкнених в X множин F_n, така, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Оскільки X — компактний простір, то кожна множина F_n компактна в X, а значить, і в A. З дискретності простору A випливає, що кожна множина F_n скінченна, що приводить до суперечності, адже множина A не є зліченною.

Припустимо тепер, що множина A є типу G_δ^* в X. Тоді $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}((0,1])$, де $\varphi_n : X \to [0,1]$ — неперервна функція для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що функція $\varphi : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, $\varphi(x) = (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, неперервна. Оскільки множина C_2 компактна, то множина $\varphi(C_2)$ замкнена, а, отже, і функціонально замкнена в $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Тому з рівності $A = \varphi^{-1}([0,1]^{\mathbb{N}} \setminus \varphi(C_2))$ випливає, що множина C_1 є функціонально відкритою в X. А це суперечить тому факту, що A не є F_σ-множиною. □

2 Розкладні і функціонально двосторонні множини

Означення 2.1. *Топологічний простір X називається спадково берівсъким, якщо кожна його замкнена підмножина є берівським простором.*

Означення 2.2. *Множина $A \subseteq X$ називається розкладною, якщо для довільної замкненої непорожньої множини F множина $\overline{F \cap A} \cap \overline{F \setminus A}$ є ніде не щільною в F.*

Твердження 2.1. *Нехай X — спадково берівський простір і $A \subseteq X$ — двостороння множина. Тоді A розкладна.*

Доведення. Зауважимо, що достатньо показати, що для берівського простору X і для довільної двосторонньої множини $B \subseteq X$ множина $\overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$ є ніде не щільною в X. Позначимо $B_1 = B$ і $B_2 = X \setminus B_1$. Легко бачити, що

$$\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = (\overline{B}_1 \setminus B_1) \cup (\overline{B}_2 \setminus B_2).$$

Оскільки B_i — двостороння множина, то $\overline{B}_i \setminus B_i$ є F_σ-множиною при $i = 1, 2$. Крім того, доповнення до кожної з множин $\overline{B}_i \setminus B_i$ є всюди щільним, тому кожна замкнена підмножина множини $\overline{B}_i \setminus B_i$ є ніде не щільною, а множини $\overline{B}_i \setminus B_i$ є першої категорії при $i = 1, 2$. Тоді, оскільки множина $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2$ є замкненою множиною першої категорії в берівському просторі X, вона ніде не щільна в X. □

Покажемо, що умова спадкової беровості простору X в твердженні 2.1 не може бути послаблена до беровості.

Приклад 2. *Існує берівський простір $X \subseteq \mathbb{R}^2$ і двостороння множина $A \subseteq X$, яка не є розкладною.*

Доведення. Нехай $X = (\mathbb{Q} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times (0, 1])$, $F = \mathbb{Q} \times \{0\}$ і A — довільна щільна в F множина, така, що множина $F \setminus A$ також щільна в F. Зауважимо, що A і $F \setminus A$ є F_σ-множинами в F, тому A є двосторонньою в замкненій множині F, а значить, і в X. □

Для підмножини A топологічного простору X покладемо

$$G_X(A) = \{x \in X : (\exists U_x - \text{відкритий окіл точки } x)(U_x \cap A - \text{двостороння множина в } X)\}$$

Лема 2.1. *Нехай X — досконалий паракомпакт і $A \subseteq X$. Тоді множина A є двосторонньою в X тоді і тільки тоді, коли $G_X(A) = X$.*

Доведення. Необхідність. Нехай множина A є двосторонньою. Для $x \in X$ покладемо $U_x = X$. Тоді $U_x \cap A$ є двосторонньою множиною в X, звідки $x \in G_X(A)$.

Достатність. Для кожного $x \in X$ виберемо такий відкритий окіл U_x, що множина $U_x \cap A$ є двосторонньою в X. Оскільки простір X паракомпаткний, то існує відкрите локально скінченне покриття $\mathcal{V} = (V_s : s \in S)$ простору X, вписане в покриття $(U_x : x \in X)$. Зрозуміло, що $A = \bigcup\limits_{s \in S} (V_s \cap A)$. Оскільки для кожного $s \in S$ існує таке $x \in X$, що $V_s \subseteq U_x$, то $V_s \cap A = V_s \cap U_x \cap A$, звідки випливає, що множина $V_s \cap A$ є двосторонньою в X, адже V_s є двосторонньою множиною. Тому за теоремою Майкла [1, с. 430] множина A є двосторонньою. □

Теорема 1. *Нехай X — досконалий паракомпакт і $A \subseteq X$ — розкладна множина. Тоді A — двостороння в X.*

Доведення. Припустимо, що множина A не є двосторонньою. Тоді $F = X \setminus G_X(A) \neq \varnothing$ згідно з лемою 2.1. Зрозуміло, що множина F замкнена в X. Покажемо, що $D = F$, де $D = \overline{F \setminus A}$. Міркуючи від супротивного припустимо, що $C = F \setminus D \neq \varnothing$ і доведемо, що $C \subseteq G_X(A)$. Справді, нехай $x_0 \in C$. Тоді існує такий відкритий окіл U точки x_0, що $U \cap D = \varnothing$. Множина $W = U \setminus F$ відкрита в X, тому W є двосторонньою множиною. Згідно з [1, с. 457] W є досконалим паракомпактом. Крім того, оскільки $W \subseteq G_X(A)$, то $W = G_W(A)$. За лемою 2.1 множина $A \cap W$ є двосторонньою в W, а значить, і в X. Зауважимо, що

$$U \cap A = (W \cap A) \cup (U \cap F \cap A).$$

Оскільки $U \cap F \subseteq A$, а множина $U \cap F$ двостороння в X, то і $U \cap A$ є двосторонньою множиною. Таким чином, $x_0 \in G_X(A)$, звідки $C \subseteq G_X(A)$. З іншого боку, $C \cap F = F \setminus D \neq \varnothing$, суперечність. Отже, $\overline{F \setminus A} = F$.

Зауважимо, що множина A щільна в F. Справді, якщо $x \in F$ і V — довільний відкритий окіл точки x в X, то $A \cap V \neq \varnothing$, адже множина $A \cap V$ не є двосторонньою в X. Доведемо тепер, що $\overline{F \cap A} = F$. Для цього візьмемо точку $x' \in F$ і відкритий окіл V' точки x' в X. Тоді множина $V' \cap F$ не порожня і відкрита в F. Тому $V' \cap F \cap A \neq \varnothing$, оскільки множина A щільна в F. Таким чином, $x' \in \overline{F \cap A}$.

Отже, $\overline{F \setminus A} \cap \overline{F \cap A} = F$, що суперечить розкладності множини A. □

Теорема 2. *Нехай X — цілком регулярний простір і $A \subseteq X$ — ліндселефова розкладна множина, причому множина $X \setminus A$ також ліндселефова. Тоді A є функціонально двосторонньою множиною в X.*

Доведення. Припустимо, що A не є множиною типу F_σ^* в X. Тоді множина $A \setminus F_\sigma^*(A)$ не порожня згідно з твердженням 1.1. Покладемо

$$F = \overline{A \setminus F_\sigma^*(A)}.$$

Позначимо $B = X \setminus A$ і покажемо, що $\overline{B \cap F} = F$. Нехай це не так. Тоді

$$C = F \setminus \overline{B \cap F} \neq \varnothing.$$

Доведемо, що $C \subseteq F_\sigma^*(A)$. Виберемо довільну точку $x_0 \in C$. Нехай U — такий функціонально відкритий окіл точки x_0 в X, що $U \cap B \cap F = \varnothing$. Тоді для довільної точки $x \in U \cap B$ існує такий функціонально відкритий окіл U_x цієї точки, що $U_x \cap F = \varnothing$. Оскільки простір $U \cap B$ є типу F_σ в B, то він ліндселефовий [1, с. 292]. Тому існує послідовність точок $x_n \in U \cap B$, така, що сім'я $(U_{x_n} : n \in \mathbb{N})$ є покриттям множини $U \cap B$. Покладемо $U_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$. Тоді множина U_0 є функціонально відкритою в X, причому $U \cap B \subseteq U_0 \subseteq X \setminus F$.

Легко бачити, що $A \cap U_0 \subseteq F_\sigma^*(A)$. Слід зазначити, що $A \cap U_0$ є ліндселефовою множиною, адже вона є типу F_σ в A. Тоді ми одержимо, що $A \cap U_0 \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (V_n \cap A)$, де V_n — відкрита множина і $V_n \cap A$ є F_σ^*-множиною в X для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді множина $A \cap U_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (V_n \cap A) \cap U_0$ є типу F_σ^* в X. Зауважимо, що $U \setminus U_0 \subseteq A$. Тоді

$$U \cap A = (U \setminus U_0) \cup (U \cap U_0 \cap A).$$

Оскільки множина $U \setminus U_0$ є типу F_σ^* в X, то $U \cap A$ також є F_σ^*-множиною в X. Отже, $x_0 \in F_\sigma^*(A)$ і $C \subseteq F_\sigma^*(A)$.

Оскільки непорожня множина C відкрита в F, то $C \cap (A \setminus F_\sigma^*(A)) \neq \varnothing$, що суперечить включенню $C \subseteq F_\sigma^*(A)$. Таким чином, наше припущення не вірне, і $\overline{B \cap F} = F$.

Крім того, легко бачити, що $\overline{A \cap F} = F$. Тоді $\overline{A \cap F} \cap \overline{B \cap F} = F$, що суперечить розкладності множини A. Отже, A є F_σ^*-множиною в X.

Оскільки множина $B = X \setminus A$ також розкладна, то вона є типу F_σ^* в X. Тому A є функціонально двосторонньою множиною. □

Література

1. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
2. Карлова О.О. *Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 191-192. — С. 52–60.
3. Куратовский К. Топология, Т.1. — М.: Мир, 1966. — 596 с.
4. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Vien), 1914.
5. Kuratowski K. *Quelques problémes concernant les espaces métriques non-séparables*, Fund. Math., (1935), 534–545.
6. Michael E. *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 831–838.
7. Montgomery D. *Non-separable metric spaces*, Fund. Math., (1935), 527–533.
8. Nagami K. *Local properties of topological spaces*, Proc. Japan. Acad., **32** (1956), 320–322.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

Надійшло 24.05.2011

Karlova O. *The decomposable and the ambiguous sets*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 71–76.

We prove that every ambiguous subset of a hereditarily Baire space is decomposable. We obtain that a decomposable set $A \subseteq X$ is ambiguous when (i) X is a perfectly paracompact space, or (ii) A and $X \setminus A$ are Lindelöf and X is a completely regular space.

Карлова Е. *Роскладные и функционально двухсторонние множества* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 71–76.

Доказано, что каждое двустороннее подмножество наследственно бэровского протранства разложимо. Установлено, что разложимое множество $A \subseteq X$ является двусторонним, если (i) X — совершенный паракомпакт, или (ii) A и $X \setminus A$ — линделефовы, а X — вполне регулярно.