Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.98

Лопушанський О.В., Шарин С.В.

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ НАПІВГРУП ОПЕРАТОРІВ

Лопушанський О.В., Шарин С.В. *Функціональне числення для генераторів аналітичних напівгруп операторів* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 83–89.

Ми будуємо функціональне числення для генераторів однопараметричних обмежених аналітичних напівгруп операторів на банаховому просторі. Клас символів такого числення складається з образів перетворення Лапласа згорткової алгебри $\mathcal{S}'_+$ розподілів повільного росту з носіями в $[0,\infty)$. Область визначення побудованого числення є щільною в банаховому просторі.

Вступ

Однією із характеристик аналітичних напівгруп є те, що їх генератори є так званими секторіальними операторами. Такі оператори відіграють важливу роль в теорії еліптичних і параболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В роботах [4, 8] (серед багатьох інших) було побудовано функціональне числення для аналітичних напівгруп операторів, яке базувалося на використанні інтеграла Ріса-Данфорда та інтегральної формули Коші.

У цій статті ми будуємо операторне числення для генераторів однопараметричних аналітичних напівгруп $e^{\mathrm{i}tA}$ операторів, що діють в банаховому просторі E, використовуючи при цьому узагальнене перетворення Лапласа. Алгебра символів такого числення складається з аналітичних в півплощині $\mathbb{C}_+ = \left\{\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \in \mathbb{C} \colon \xi \in (0,\infty)\right\}$ функцій $\widehat{f}$, які є перетвореннями Лапласа розподілів Шварца повільного росту $f \in \mathcal{S}'_+$ з носіями в додатній півосі $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$. Функціональне числення $\varPhi\colon \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ (теорема 3.2) ми визначаємо за формулою (4), причому областю визначення цього числення є щільний в E підпростір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту оператора A (теорема 3.1). Зауважимо, що формула (4) є операторним аналогом узагальненого перетворення Лапласа $\widehat{f}(\zeta) = \langle f(t), e^{\mathrm{i}t\zeta}\rangle$ [1, II.9]. Суттєвою відмінністю цієї роботи від попередніх є алгебраїчний аспект функціонального числення. А саме, відображення $\varPhi$ є гомоморфізмом алгебр, тобто виконується властивість $\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A)\widehat{g}(A)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46F05, 46H30, 47A60.
Ключові слова і фрази: функціональне числення, аналітичні напівгрупи операторів, узагальнені функції Шварца повільного росту.

1 Позначення та основні поняття

Нехай $\mathscr{L}(X)$ — простір неперервних лінійних операторів на локально опуклому просторі X. Спряжений до X простір ми будемо позначати X', який всюди далі наділятимемо топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах в X.

Всюди далі ми будемо використовувати позначення $\partial^\alpha := (-\mathfrak{i})^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$, де $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Для спрощення позначень писатимемо $\partial := \partial^1$.

Під однопараметричною напівгрупою обмежених лінійних операторів на банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ з генератором A ми розуміємо таке відображення

$$U_t \colon \mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto e^{\mathfrak{i}tA} \in \mathscr{L}(E), \tag{1}$$

що $U_{t+s} = U_t \circ U_s$ для всіх $t, s \in \mathbb{R}_+$ і $U_0 = I$ — одиничний оператор в $\mathscr{L}(E)$. Відображення (1) називається C_0-напівгрупою, якщо $\lim\limits_{t\to+0} \|U_t x - x\| = 0$ для всіх $x \in E$. Генератор A напівгрупи U_t визначають за формулою

$$Ax = -\mathfrak{i} \lim_{t\to+0} t^{-1} (U_t x - x) = \partial U_t x \,|_{t=0}, \qquad x \in \mathfrak{D}(A),$$

де $\mathfrak{D}(A)$ складається з усіх $x \in E$, для яких існує вище записана границя. Для того, щоб підкреслити, що генератором напівгрупи U_t є оператор A часто напівгрупу позначають $e^{\mathfrak{i}tA}$. Напівгрупа U_t називається обмеженою аналітичною напівгрупою, якщо відображення (1) можна аналітично продовжити в деяку кутову область в $\mathbb{C}$, що містить $\mathbb{R}_+$, причому таке продовження є рівномірно обмеженою в цій області функцією. Відомо, що кожна така напівгрупа є C_0-напівгрупою. Детальнішу інформацію про теорію напівгруп операторів можна знайти в [6, 4].

Введемо в розгляд простір Шварца $\mathcal{S}$ швидко спадних функцій так, як це зроблено в [3]. Нехай $\mathcal{S}^\alpha$ — банаховий простір неперервно диференційованих до порядку α комплексних функцій φ на $\mathbb{R}$ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_{\mathcal{S}^\alpha} := \sup\left\{\left|t^\alpha \partial^\beta \varphi(t)\right| : \beta \le \alpha,\, t \in \mathbb{R}\right\}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+)$. Простір $\mathcal{S} := \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}^\alpha$ наділимо топологією проективної границі $\mathcal{S} \simeq \lim\operatorname{pr} \mathcal{S}^\alpha$ відносно компактних вкладень $\mathcal{S}^\alpha \looparrowright \mathcal{S}^\beta$, де $\beta \le \alpha$. Відомо, що введений таким чином простір $\mathcal{S}$ є ядерним простором. Спряжений до нього простір $\mathcal{S}'$ називають простором узагальнених функцій Шварца повільного росту.

Означимо простір $\mathcal{S}_+ := \{\vartheta\varphi \colon \varphi \in \mathcal{S}\}$, де $\vartheta \colon \mathbb{R} \ni t \longmapsto \vartheta(t)$ — класична функція Хевісайда. Неважко показати, що простір $\mathcal{S}_+$ ізоморфний фактор простору $\mathcal{S}/\mathcal{S}'^{\perp}_+$, де $\mathcal{S}'^{\perp}_+$ — ортогональне доповнення простору $\mathcal{S}_+$ відносно двоїстості $\langle\, \mathcal{S}', \mathcal{S}\,\rangle$. Оскільки властивість ядерності наслідується фактор просторами, то $\mathcal{S}_+$ — ядерний простір. Нехай $\mathcal{S}'_+$ — замкнутий в $\mathcal{S}'$ підпростір тих розподілів, носії яких розміщені в $\mathbb{R}_+$. Відомо, що цей простір є згортковою алгеброю з одиницею δ_0, де δ_t — функціонал Дірака, зосереджений в точці $t \in \mathbb{R}_+$.

Відомо, що перетворення Фур'є $F \colon f \longmapsto F[f]$ здійснює топологічний ізоморфізм простору $\mathcal{S}'$ на себе. Тому F є коректно визначеним на $\mathcal{S}'_+$, причому образ $F[\mathcal{S}'_+]$ є замкнутим підпростором в $\mathcal{S}'$. Перетворення Лапласа розподілу $f \in \mathcal{S}'_+$ визначають за формулою

$$L[f](\zeta) := F\left[f(t)e^{-t\eta}\right](\xi) = \left\langle f(t), e^{\mathfrak{i}t\zeta}\right\rangle, \qquad \zeta = \xi + \mathfrak{i}\eta \in \mathbb{C}_+, \tag{2}$$

де $\widehat{f}(\zeta) := L[f](\zeta)$ — аналітична функція на $\mathbb{C}_+$. Образ $\widehat{\mathcal{S}'_+} := L\left[\mathcal{S}'_+\right]$ простору $\mathcal{S}'_+$ при перетворенні Лапласа є мультиплікативною алгеброю відносно множення $\widehat{f * g}(\zeta) = \widehat{f}(\zeta) \cdot \widehat{g}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}_+$ [1, II.9]. Простір $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ ми наділяємо індукованою відображенням $L\colon \mathcal{S}'_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}'_+}$ топологією.

2 Допоміжні твердження

Нехай всюди далі $(E, \|\cdot\|)$ — комплексний банаховий простір. Для довільної відкритої в $\mathbb{R}$ множини O і довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ позначимо через $\mathcal{S}^\alpha(O, E)$ банаховий простір всіх неперервно диференційованих до порядку α функцій $x : \mathbb{R} \supseteq O \ni t \longmapsto x(t) \in E$ таких, що функція x і всі її похідні до порядку α включно мають скінченні границі при $t \to +0$ і для яких скінченною є норма $\|x\|_{\mathcal{S}^\alpha(\mathcal{O},\mathcal{E})} := \sup\left\{\|t^\alpha\, \partial^\beta x(t)\|\colon t \in O \subseteq \mathbb{R}, \beta \le \alpha\right\}$. Простір $\mathcal{S}(O, E) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{S}^\alpha(O, E)$ ми наділяємо топологією проективної границі $\mathcal{S}(O, E) \simeq \lim\operatorname{pr} \mathcal{S}^\alpha(O, E)$ відносно очевидних вкладень $\mathcal{S}^\alpha(O, E) \hookrightarrow \mathcal{S}^\beta(O, E)$ при $\beta \le \alpha$. Для спрощення позначень ми будемо писати: $\mathcal{S}^\alpha(E) := \mathcal{S}^\alpha(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{S}(E) := \mathcal{S}(\mathbb{R}, E)$, $\mathcal{S}^\alpha_+(E) := \mathcal{S}^\alpha(\operatorname{int}\mathbb{R}_+, E)$, $\mathcal{S}_+(E) := \mathcal{S}(\operatorname{int}\mathbb{R}_+, E)$.

Наступне твердження є аналогом теореми [11] про продовження C^∞ функції, визначеної на підпросторі.

Лема 2.1. *Існує неперервний лінійний оператор продовження $\Lambda\colon \mathcal{S}_+(E) \longmapsto \mathcal{S}(E)$ такий, що $(\Lambda x)(t) = x(t)$ для $t > 0$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \chi(t)$ — така комплексна нескінченно диференційована функція, що $\chi(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$ і $\chi(t) = 0$ при $t \ge 2$. В статті [11] доведено, що існує така послідовність дійсних чисел $\{a_k\}$, що: (i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k| 2^{k\beta} < \infty$ для всіх $\beta \in \mathbb{Z}_+$; (ii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k(-2^k)^\beta = 1$ для всіх $\beta \in \mathbb{Z}_+$. Для $t < 0$ визначимо оператор Λ за правилом $(\Lambda x)(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k \chi(-2^k t) x(-2^k t)$. Оскільки $-2^k \to -\infty$ при $k \to \infty$, то сума в попередній формулі є скінченною для кожного $t < 0$. З властивості (i) випливає що всі похідні $\partial^\beta(\Lambda x)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k(-2^k)^\beta \sum_{i=0}^{\beta} C^i_\beta \chi^{(i)}(-2^k t) x^{(\beta-i)}(-2^k t)$ збігаються при $t \to -0$. Більше того, з (ii) та з означення функції χ випливає, що ці границі узгоджуються з границями функцій $\partial^\beta x(t)$ при $t \to +0$. Таким чином, якщо $(\Lambda x)(t) := x(t)$ для $t > 0$ і $(\Lambda x)(0) := \lim_{t\to 0} x(t)$, то Λx — E-значна нескінченно диференційована функція на $\mathbb{R}$. Для будь-яких $t < 0$ і $\beta \le \alpha$ маємо

$$\left\|\partial^\beta(\Lambda x)(t)\right\| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k| 2^{k\beta} \sum_{i=0}^{\beta} C^i_\beta |\chi^{(i)}(-2^k t)|\, \|x^{(\beta-i)}(-2^k t)\| \le K_{\beta,\chi,\{a_k\}} \sup_{t\in(0,\infty),\, \beta\le\alpha} \|\partial^\beta x(t)\|,$$

де $K_{\beta,\chi,\{a_k\}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k| 2^{k\beta} \sum_{i=0}^{\beta} C^i_\beta \sup_{t\in[0,2]} |\chi^{(i)}(t)| < \infty$ завдяки (i). Отже, ми довели неперервність визначеного вище лінійного відображення $\Lambda\colon \mathcal{S}_+(E) \longmapsto \mathcal{S}(E)$. □

Символами $\otimes_{\mathfrak{p}}$ і $\otimes_{\mathfrak{e}}$ ми будемо позначати поповнення алгебраїчного тензорного добутку $\otimes$ в проективній тензорній топології і в топології рівномірної збіжності на одностайно неперервних підмножинах відповідно.

Лема 2.2. *Справджуються наступні ізоморфізми $\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ і $\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. Крім того, кожен елемент x з $\mathcal{S}(E)$ або $\mathcal{S}_+(E)$ може бути зображений, взагалі кажучи не єдиним чином, у вигляді абсолютно збіжного ряду*

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E, \quad \varphi_j \in \mathcal{S} \ \text{ або } \ \mathcal{S}_+, \tag{3}$$

де $\sum_j |\lambda_j| < \infty$ і послідовності $\{\varphi_j\}$, $\{x_j\}$ збігаються до нуля у відповідних просторах.

Доведення. В роботі [10] доведено ізоморфізм $\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S}$. З ядерності простору $\mathcal{S}$ випливає ізоморфізм $E \otimes_{\mathfrak{e}} \mathcal{S} \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ (див. [7, IV, 9.4]). Тому, $\mathcal{S}(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$. Аналогічні міркування справджуються і для $\mathcal{S}_+(E)$, тому $\mathcal{S}_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$. З теореми [7, III.6.4] про зображення елементів проективного тензорного добутку просторів Фреше випливає, що кожен елемент $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}$ (або $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S}_+$) можна записати у формі (3). □

3 Функціональне числення

Нехай $\mathfrak{D}(A^\infty) := \bigcap_{\alpha\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{D}(A^\alpha)$, де $\mathfrak{D}(A^\alpha)$ — область визначення оператора A^α. Відомо [4, теорема 5.17], що для аналітичної напівгрупи підпростір в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ цілих аналітичних векторів її генератора A щільний в E. Визначимо в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ підпростір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту наступним чином $\mathfrak{A} := \bigcap_{t,\,\alpha} E_t^\alpha$, де $E_t^\alpha := \big\{(tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA}x \in E\colon x \in E, t \in \mathbb{R}_+,\, \alpha \in \mathbb{Z}_+\big\}$. Зауважимо, що цей простір служить областю визначення побудованого нижче функціонального числення. У доведенні наступної теореми ми використаємо схему доведення з [2, теореми 1.1, 1.2].

Теорема 3.1. *Нехай $e^{\mathrm{i}tA}$ — обмежена аналітична напівгрупа над комплексним банаховим простором E така, що її генератор A має обмежений обернений A^{-1}. Тоді простір $\mathfrak{A}$ цілих аналітичних векторів поліноміального росту щільний в E.*

Доведення. Нагадаємо відому теорему Ріхтера [9] (див. також [2, теорема 1.1]): якщо $\{\mathfrak{E}_k\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ — такі банахові простори, що кожне вкладення $\mathfrak{E}_{k+1} \looparrowright \mathfrak{E}_k$ неперервне і щільне, то вкладення $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{E}_k \looparrowright \mathfrak{E}_0$ теж щільне.

В роботі [2, теорема 1.2] показано, що вкладення $\mathfrak{D}(A^\infty) \looparrowright E$ щільне в топології, визначеній зліченною системою норм $\|x\|_{\mathfrak{D}(A^\alpha)} = \sum_{0\le\beta\le\alpha} \|A^\beta x\|$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки $e^{\mathrm{i}tA}$ — аналітична напівгрупа, то $\ker e^{\mathrm{i}tA} = \{0\}$, $\forall t > 0$. З припущень теореми випливає $\ker A = \{0\}$. Тому оператори $e^{\mathrm{i}tA}$ і $(tA)^\alpha$ мають обернені $e^{-\mathrm{i}tA}$ і $(tA)^{-\alpha}$ відповідно. З обмеженості $e^{\mathrm{i}tA}$ і замкнутості $(tA)^{-\alpha}$ випливає, що E_t^α — банаховий простір відносно норми $\|x\|_{E_t^\alpha} := \big\|(tA)^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}tA}x\big\|$, для довільних $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$ і $x \in E_s^\alpha$.

Використовуючи комутативність операторів, для всіх $s < t$ і $\alpha < \beta$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\|x\|_{E_t^\beta} =& \big\|(tA)^{-\beta}e^{-\mathrm{i}tA}x\big\| = \|(sA)^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}sA}t^{-\beta}s^\alpha A^{-(\beta-\alpha)}e^{-\mathrm{i}(t-s)A}x\| \\
\ge& \frac{\|s^{-\alpha}t^\beta A^{\beta-\alpha}e^{\mathrm{i}(t-s)A}\| \|s^\alpha t^{-\beta}A^{-(\beta-\alpha)}e^{-\mathrm{i}(t-s)A}(sA)^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}sA}x\|}{\|s^{-\alpha}t^\beta A^{\beta-\alpha}e^{\mathrm{i}(t-s)A}\|} \\
\ge& \frac{\|(sA)^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}sA}x\|}{\sup_{t-s\in(0,\infty)} s^{-\alpha}t^\beta \|A^{\beta-\alpha}e^{\mathrm{i}(t-s)A}\|} = C^{-1}\|x\|_{E_s^\alpha}
\end{aligned}$$

де $C = s^{-\alpha}t^{\beta}\|A^{\beta-\alpha}e^{\mathrm{i}(t-s)A}\|$.

Доведемо, що E_t^α щільний в E для довільних $t > 0$ і $\alpha > 0$. Припустимо протилежне. Нехай існує ненульовий функціонал x' зі спряженого простору E' такий, що $\langle x', (tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA}x\rangle = 0$ для всіх $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$. Тоді

$$\left\langle x', (sA)^\beta e^{\mathrm{i}sA}x\right\rangle = \left\langle x', (tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA}\left[s^\beta t^{-\alpha}A^{\beta-\alpha}e^{\mathrm{i}(s-t)A}\right]x\right\rangle = 0$$

для всіх s, β таких, що $t < s$ і $\alpha < \beta$. Тому, з аналітичності і неперервності $e^{\mathrm{i}tA}$ випливає $\left\langle x', (tA)^\beta e^{\mathrm{i}tA}x\right\rangle \equiv 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і $\beta \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема, $\langle x', x\rangle = 0$ для всіх $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$. Отже, з щільності $\mathfrak{D}(A^\infty)$ в E маємо $x' = 0$, що суперечить припущенню.

Із щільності $\mathfrak{D}(A^\infty)$ в E слідує, що вкладення $E_t^\beta \hookrightarrow E_s^\alpha$ неперервне для всіх $s < t$ і $\alpha < \beta$. Щільність E_t^β в E_s^α випливає з доведеної щільності $E_{t-s}^{\beta-\alpha}$ в E.

Таким чином, послідовність банахових просторів $\left\{\mathfrak{E}_k := E_k^k \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\}$ задовольняє умови теореми Ріхтера. Звідси маємо, що підпростір $\mathfrak{A} = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathfrak{E}_k$ щільний в E. □

Простір $\mathfrak{A}$ ми наділяємо топологією проективної границі $\mathfrak{A} \simeq \lim\operatorname{pr} E_t^\alpha$ відносно щільних вкладень $E_t^\beta \hookrightarrow E_s^\alpha$, де $s < t$ і $\alpha < \beta$.

Нехай $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E) \subset \mathscr{L}(E)$ — простір необмежених лінійних операторів на E, які мають спільну область визначення $\mathfrak{A} \subset E$ і які діють неперервно з $\mathfrak{A} \simeq \lim\operatorname{pr} E_s^\alpha$ в E. Наділимо простір $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ сильною операторною топологією.

Зауважимо, що простір $\mathfrak{A}$ інваріантний відносно дії операторів $e^{\mathrm{i}tA}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Дійсно, для всіх $x \in \mathfrak{D}(A^\infty)$ маємо $A^\beta e^{\mathrm{i}tA}x = e^{\mathrm{i}tA}A^\beta x$. Перетин образів операторів $\bigcap_t \mathfrak{R}(e^{\mathrm{i}tA})$ міститься в $\mathfrak{D}(A^\infty)$ [5, теорема X.53], тому $e^{\mathrm{i}tA}\left(t^\alpha A^\beta e^{\mathrm{i}sA}\right)x = t^\alpha A^\beta e^{\mathrm{i}(t+s)A}x$. Простір $\mathfrak{D}(A^\infty)$ щільний в E і оператори $e^{\mathrm{i}tA}$ обмежені, тому попередня рівність справджується для всіх $x \in E$. Звідси випливає коректність наступного означення. Комутантом напівгрупи $e^{\mathrm{i}tA}$ називається підалгебра $\left\{V \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E) \colon e^{\mathrm{i}tA} \circ V = V \circ e^{\mathrm{i}tA},\ \forall t \in \mathbb{R}_+\right\}$.

Теорема 3.2. *Відображення $\Phi \colon \widehat{\mathcal{S}'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$, де оператор $\widehat{f}(A)$ визначений за формулою*

$$\widehat{f}(A)x = \left\langle f(t), e^{\mathrm{i}tA}x\right\rangle, \qquad f \in \mathcal{S}'_+, \quad x \in \mathfrak{A}, \tag{4}$$

є неперервним гомоморфізмом з мультиплікативної алгебри аналітичних функцій $\widehat{\mathcal{S}'_+}$ на комутант в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ обмеженої напівгрупи $e^{\mathrm{i}tA}$. Оператори з образу $\Phi\left[\widehat{\mathcal{S}'_+}\right]$ задовольняють рівності

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(A) &= \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A), \qquad && f, g \in \mathcal{S}'_+, \\ \widehat{\partial^\alpha f}(A) &= (-A)^\alpha \circ \widehat{f}(A), \qquad && f \in \mathcal{S}'_+, \alpha \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \tag{5}$$

і $\widehat{\delta}_0(A) = I$ — одиничний оператор над $\mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай $\|e^{\mathrm{i}tA}\|_{\mathscr{L}(E)} \leq M$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$. Перевіримо, що формула (4) є коректно визначена. Розглянемо E-значні функції

$$\omega_x \colon \mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto e^{\mathrm{i}tA}x, \qquad x \in \mathfrak{A}.$$

З [5, теорема X.53] випливає, що для кожної обмеженої аналітичної напівгрупи $e^{\mathrm{i}tA}$ існує така константа $M_0 > 0$, що нерівність

$$\left\|t^\alpha \partial^\alpha e^{\mathrm{i}tA} x\right\| = \left\|(tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA} x\right\| \leq M M_0 \|x\|, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

справджується для всіх $x \in \mathfrak{A}$. Звідси

$$\|\omega_x\|_{\mathcal{S}^\alpha_+(E)} = \sup_{\beta \leq \alpha,\, t \in \mathbb{R}_+} \left\|t^\alpha \partial^\beta e^{\mathrm{i}tA} x\right\| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\|(tA)^\alpha e^{\mathrm{i}tA} x\right\| \leq C M M_0 \|x\|, \tag{7}$$

де $C = \left\|A^{\beta-\alpha}\right\|_{\mathscr{L}(E)}$ і $A^{\beta-\alpha}$ позначає обернений оператор до $A^{\alpha-\beta}$. Тому норми $\|\omega_x\|_{\mathcal{S}^\alpha_+(E)}$ скінченні для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Отже, $\omega_x \in \mathcal{S}_+(E)$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$.

З ядерності простору $\mathcal{S}$ випливає (див. [7, IV, 9.4, наслідок 1]) ізоморфізм $E \otimes_{\mathfrak{p}} \mathcal{S} \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}', E)$. Тому з леми 2.2 отримуємо $\mathcal{S}(E) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}', E)$. За лемою 2.1 існує неперервне лінійне розширення $\varLambda\colon \mathcal{S}_+(E) \longrightarrow \mathcal{S}(E)$. Оскільки вкладення $\mathcal{S}'_+ \hookrightarrow \mathcal{S}'$ топологічне, то з рівності $\mathcal{S}(E) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{S}', E)$ випливає, що оператор

$$\mathcal{S}'_+ \ni f \longmapsto \langle f, \varLambda \circ \omega_x \rangle \in E, \qquad x \in \mathfrak{A}, \tag{8}$$

належить $\mathscr{L}(\mathcal{S}'_+, E)$. Перевіримо його незалежність від $\varLambda$. За лемою 2.2 існує розвинення в ряд $\omega_x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j y_j \otimes \psi_j$, де $y_j \in E$ і $\psi_j \in \mathcal{S}_+$. З абсолютної збіжності цього ряду в $\mathcal{S}_+(E)$ та неперервності $\varLambda$ отримуємо $\varLambda \circ \omega_x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j y_j \otimes \varLambda_c \psi_j$, де $\varLambda_c$ позначає класичний оператор розширення з [11], який є звуженням оператора $\varLambda$ на скалярні функції. З іншого боку маємо $\langle f, \psi_j \rangle = \langle f, \varLambda_c \psi_j \rangle$, оскільки носій розподілу f зосереджений в $\mathbb{R}_+$. Звідси випливає незалежність означення (8) від $\varLambda$. Таким чином формула (4) однозначно визначає лінійний оператор $\widehat{f}(A)x = \langle f, \omega_x \rangle$, який відображає $x \in \mathfrak{A}$ в E.

Оскільки $\omega_x \in \mathcal{S}_+(E)$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$, то для кожного $f \in \mathcal{S}'_+$ і $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ існує така константа K, що $\|\langle f, \omega_x \rangle\| \leq K \, \|\omega_x\|_{\mathcal{S}^\alpha_+(E)}$, $x \in \mathfrak{A}$. Звідси та з нерівності (7) отримуємо $\widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$. Остаточно неперервність $\varPhi$ випливає з неперервності $L\colon \mathcal{S}'_+ \longrightarrow \widehat{\mathcal{S}'_+}$.

Перевіримо, що $\varPhi$ — алгебраїчний гомоморфізм. Нехай $g \in \mathcal{S}'_+$ — регулярний розподіл. З властивостей інтеграла Бохнера отримуємо

$$\widehat{f * g}(A)x = \left\langle (f * g)(u), e^{\mathrm{i}uA} x \right\rangle \Big|_{u=t+s} = \left\langle f(t), e^{\mathrm{i}tA} \left\langle g(s), e^{\mathrm{i}sA} x \right\rangle \right\rangle = \left[\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)\right] x, \quad \forall x \in \mathfrak{A}.$$

З комутативності згортки в $\mathcal{S}'_+$ випливає $\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A) = \widehat{g}(A) \circ \widehat{f}(A)$ для регулярного розподілу g. Наближаючи довільний розподіл $g \in \mathcal{S}'_+$ регулярними і використовуючи неперервність відображення $\varPhi \circ L$ з $\mathcal{S}'_+$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$, отримаємо потрібну властивість.

Доведемо другу з рівностей (5). Оскільки $A^\alpha e^{\mathrm{i}tA} x = e^{\mathrm{i}tA} A^\alpha x$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$, то

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = \left\langle \partial^\alpha f(t), e^{tA} x \right\rangle &= (-1)^\alpha \left\langle f(t), A^\alpha e^{tA} x \right\rangle \\
&= (-1)^\alpha \left\langle f(t), e^{tA} A^\alpha x \right\rangle = \widehat{f}(A)(-A)^\alpha x = (-A)^\alpha \widehat{f}(A)x.
\end{aligned}$$

Для функціоналу Дірака $\delta_t \in \mathcal{S}'_+$ маємо $\widehat{\delta_t}(A)x = e^{\mathrm{i}tA} x$ для всіх $x \in \mathfrak{A}$. Отже, $\widehat{f}(A) \circ e^{\mathrm{i}tA} = e^{\mathrm{i}tA} \circ \widehat{f}(A)$ для всіх $f \in \mathcal{S}'_+$ і $t \in \mathbb{R}_+$. Навпаки, нехай $K \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ — довільний оператор з властивістю $K \circ \widehat{\delta_t}(A) = \widehat{\delta_t}(A) \circ K$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$. Зауважимо, що для всіх $x \in \mathfrak{A}$ маємо $Kx = K\widehat{\delta_0}(A)x$. Підставляючи t замість 0 і використовуючи попередню властивість, отримаємо $K \circ \widehat{\delta_t}(A) = \widehat{\delta_t}(A) \circ K$. Отже, образ відображення $\varPhi$ співпадає з комутантом напівгрупи $\widehat{\delta_t}(A) = e^{\mathrm{i}tA}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$. □

Література

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
2. Горбачук В.И., Князюк А.В. *Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений* // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, вып. 3. — С. 55–91.
3. Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 4. — С. 97–131.
4. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992. — 351 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978. — 393 с.
6. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962. — 830 с.
7. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
8. Haase M. The functional calculus for sectorial operators, Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäser-Verlag, 2006, 392 p.
9. Richter P., Unitary representations of countable inifinite dimensional Lie group, Leipzig: Karl Marx Univesität, 1977. — Mph 5. — 7 p.
10. Schwartz L. *Espaces de fonctions différentielles à valeurs vectorielles*, J. Anal. Math., **4** (1954/55), 88–148.
11. Seeley R.T. *Extensions of C^∞-functions defined in a half-space*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 625–626.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 20.02.2012

Lopushansky O.V., Sharyn S.V. *Functional calculus for generators of analytic semigroups of operators*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 83–89.

We construct a functional calculus for generators of one-parameter bounded analytic semigroups of operators on a Banach space. The calculus symbol class consist of the Laplace image of the convolution algebra $\mathcal{S}'_+$ of tempered distributions with supports in $[0,\infty)$. Domain of constructed calculus is dense in the Banach space.

Лопушанский О.В., Шарин С.В. *Функциональное исчисление для генераторов аналитических полугрупп операторов* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 83–89.

Ми строим функциональное исчисление для генераторов однопараметрических ограниченных аналитических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве. Класс символов такого исчисления состоит из образов преобразования Лапласа сверточной алгебры $\mathcal{S}'_+$ медленно растущих распределений с носителями в $[0,\infty)$. Область определения построенного исчисления плотна в банаховом пространстве.