Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.53

Заболоцький М.В., Костюк О.В.

ПОВІЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛІВ СТІЛЬТЬЄСА ВІД МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

Заболоцький М.В., Костюк О.В. *Повільне зростання інтегралів Стільтьєса від монотонних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 43–48.

Знайдено необхідні та достатні умови на монотонні функції ψ і l, за яких інтеграл Стільтьєса $L(x) = \int_1^x \psi(t)dl(t)$ є повільно зростаючою функцією. Отримані результати застосовано для дослідження розподілу значень та зростання неванліннових характеристик мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій.

Вступ

Неперервна (вимірна), зростаюча на $[1, +\infty)$ функція φ називається повільно зростаючою (пов. зр.), якщо $\varphi(2x) \sim \varphi(x)$ при $x \to +\infty$. В теорії розподілу значень цілих та мероморфних функцій характеристики зростання часто виражаються за допомогою інтегралів Стільтьєса. Зокрема, якщо f, g — мероморфні відповідно в $\mathbb{C}$ та півплощині $\{z : Imz \geq 0\}$ функції ($f(0) \neq \infty,\ g(0) \neq \infty$), $n(r, f)$, $\tilde{n}(r, g)$ — кількість полюсів цих функцій в крузі $\{z : |z| \leq r\}$ та в множині $\left\{z : \left|z - i\dfrac{r}{2}\right| \leq \dfrac{r}{2}, |z| > 1\right\}$, $\rho(f(z)) = |f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$ — сферична похідна f, $c(r, g) = \sum\limits_{1<\rho_n\leq r} \sin\psi_n$, $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюси g, то характеристики Неванлінни та Цудзі функції g дорівнюють

$$C(r, g) = 2\int_1^r \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{r^2}\right)dc(r, g), \quad \widetilde{R}(r, g) = \int_1^r \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{r}\right)d\tilde{n}(r, g) = \int_1^r \tilde{n}(r, g)d\Big(1 - \frac{1}{t}\Big),$$

а лічильна функція Неванлінни та сферична характеристика Сімідзу-Альфорса функції f визначаються так ($n(1, f) = 0$)

$$N(r, f) = \int_1^r \ln\frac{r}{t}dn(t, f) = \int_1^r n(t, f)d\ln t, \quad \overset{\circ}{T}(r, f) = \int_1^r \overset{\circ}{A}(t, f)d\ln t,$$

де $\overset{\circ}{A}(r, f) = \dfrac{1}{\pi}\iint_{|z|\leq r} \rho^2(f(z))dxdy$ (див., наприклад, [2, с. 38-42]).

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30E99.

Ключові слова і фрази: повільно зростаюча функція, інтеграл Стільтьєса.

Функції, неванліннові характеристики яких є пов. зр., мають цікаві та специфічні властивості (вкажемо тут тільки на статті [1], [4]–[8]). Зокрема, правильні такі твердження.

Теорема A ([6]). Якщо f — ціла трансцендентна функція і її неванліннова характеристика $T(r, f)$ — пов. зр., то f не має скінченних валіронових виняткових значень.

Теорема B ([5]). Якщо неванліннова характеристика $T(r, f)$ мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f є пов. зр. і ∞ є її неванлінновим винятковим значенням, то за асимптотичну криву, на якій $f(z) \to \infty$, можна брати для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$ промінь $\{z : \arg z = \theta\}$.

Тому є природною задача відшукання умов, за яких інтеграл Стільтьєса зі змінною верхньою межею є пов. зр. функцією.

1 Формулювання основних результатів

Нехай l, ψ — монотонні, додатні на $[1, +\infty)$ функції, а

$$L(x) = \int_1^x \psi(t) dl(t).$$

У [3] знайдено достатні умови на функції ψ, l, l_1, l_2, за яких функція L є пов. зр., $l_1(x) \le L(x) \le l_2(x)$. В даній роботі ми вкажемо умови на функції ψ і l, щоб інтеграл Стільтьєса L був пов. зр. функцією.

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що l — зростаюча функція. В протилежному випадку зобразимо функцію L у вигляді $L(x) = -\int_1^x \psi(t) dl_1(t)$, де $l_1(x) = l(1) - l(x)$.

Теорема 1. *Якщо ψ — спадна, l — пов. зр. функції, то L — пов. зр. функція.*

Зауваження 1.1. *Обернене твердження не є правильним. На це вказують приклади функцій $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$, $l(x) = x$, для яких $L(x) = \ln x$.*

Зауваження 1.2. *Твердження теореми 1 показує, що в теоремі 2 з [3] умови на функції l_1 та l_2 є зайвими.*

Теорема 2. *Нехай ψ — зростаюча функція. Якщо функція L — пов. зр., то l є пов. зр., тобто*

$$l(2x)/l(x) - 1 \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{1}$$

Навпаки, якщо l є пов. зр. і

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{l(x)\psi(x)}{L(x)} < +\infty, \tag{2}$$

то функція L — пов. зр.

Зауваження 1.3. *Для функцій $l(x) = \ln x$ та $\psi(x) = x$ умова (1) виконується, (2) не виконується, а $L(x) = x - 1$ не є пов. зр. Тому умова (2) в теоремі 2 є істотною.*

Зауваження 1.4. *Для функцій $\psi(x) = x$ і $l(x) = x$ умова (1) не виконується, а умова (2) виконується, бо $L(x) = x^2/2$ і $\varlimsup\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2/2} = 2$. Отже, цей приклад разом з прикладом із зауваження 1.3 показують незалежність умов (1) та (2).*

2 Допоміжні результати та доведення теорем

Доведення теорем спирається на наступне твердження.

Лема 2.1. *Нехай функція ψ — зростаюча. Якщо L — пов. зр., то*

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty. \tag{3}$$

Навпаки, якщо

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty, \tag{4}$$

то функція L є пов. зр.

Доведення. Маємо

$$\frac{L(2x)-L(x)}{L(x)}=\frac{\int_x^{2x}\psi(t)dl(t)}{L(x)}\geq\frac{\psi(x)(l(2x)-l(x))}{L(x)}\geq 0,$$

$$0\leq\frac{L(2x)-L(x)}{L(2x)}=\frac{\int_x^{2x}\psi(t)dl(t)}{L(2x)}\leq\frac{\psi(2x)(l(2x)-l(x))}{L(2x)}.$$

Якщо L — пов. зр., то з першого співвідношення отримуємо (3). З другої нерівності маємо, якщо (4) виконується, то L — пов. зр. □

Зауваження 2.1. *Умову (4) у лемі 2.1 не можна замінити на умову (3). Дійсно, нехай $\psi(x)=e^x$ і $l(x)=1-\dfrac{1}{e^x}$. Для цих функцій $L(x)=x$ не є пов. зр. Водночас умова (3) виконується, бо*

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x)-l(x)\big)=\frac{e^x}{x}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)\sim\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to+\infty,$$

а (4) не виконується, бо

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x)-l(x)\big)=\frac{e^{2x}}{2x}\left(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)\sim\frac{e^x}{2x}\to+\infty,\quad x\to+\infty.$$

Отже, умова (3) не є достатньою для пов. зр. функції L.

Аналогом леми 2.1 для спадних функцій ψ є наступне твердження, яке доводиться подібно.

Лема 2.2. *Нехай функція ψ — спадна. Якщо L — пов. зр. функція, то*

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty.$$

Навпаки, якщо

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x)-l(x)\big)\to 0,\quad x\to+\infty,$$

то функція L є пов. зр.

З лем 2.1 та 2.2 безпосередньо випливає твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай ψ — монотонна функція і $l(2x) - l(x) \le A < +\infty$, де $A > 0$ — деяка стала. Для того, щоб функція L була пов. зр., необхідно і досить, щоб*

$$\psi(x) = o(L(x)), \quad x \to +\infty.$$

Перейдемо до доведення теорем.

Доведення теореми 1. Оскільки $\psi(x)$ — спадна функція, а $l(x)$ — зростаюча на $[1, +\infty)$, то

$$\int_x^{2x} \psi(t)dl(t) \le \psi(x)\big(l(2x) - l(x)\big),$$

а

$$\int_1^x \psi(t)dl(t) \ge \psi(x)\big(l(x) - l(1)\big).$$

Тому

$$0 \le \frac{L(2x) - L(x)}{L(x)} = \frac{\int_x^{2x} \psi(t)dl(t)}{\int_1^x \psi(t)dl(t)} \le \frac{\psi(x)\big(l(2x) - l(x)\big)}{\psi(x)\big(l(x) - l(1)\big)} = \left(\frac{l(2x)}{l(x)} - 1\right)\left(1 - \frac{l(1)}{l(x)}\right)^{-1}.$$

Позаяк за умовою теореми 1 l — пов. зр. функція, то з останнього співвідношення випливає, що L також є пов. зр. □

Доведення теореми 2. Враховуючи, що

$$L(x) = \int_1^x \psi(t)dl(t) \le \psi(x)l(x),$$

маємо

$$\frac{\psi(x)}{L(x)}\big(l(2x) - l(x)\big) \ge \frac{\psi(x)(l(2x) - l(x))}{\psi(x)l(x)} = \frac{l(2x)}{l(x)} - 1 \ge 0.$$

Оскільки L є пов. зр., то за лемою 2.1 виконується (3). З останнього співвідношення одержуємо пов. зр. функції l.

Навпаки, нехай l — пов. зр. функція. Завдяки умові (2) маємо $\dfrac{\psi(x)l(x)}{L(x)} < B$, де $B > 0$ — деяка стала. Тому

$$\frac{\psi(2x)}{L(2x)}\big(l(2x) - l(x)\big) \le \frac{\psi(2x)\big(l(2x) - l(x)\big)}{\frac{1}{B}\psi(2x)l(2x)} = B\left(1 - \frac{l(x)}{l(2x)}\right) \to 0,\ x \to +\infty,$$

і за лемою 2.1 (див. (4)) отримуємо пов. зр. функції L. □

3 Деякі зауваження та застосування результатів

Нехай l, ψ — зростаючі функції. Використовуючи теореми про інтегрування частинами та заміну змінних в інтегралах Стільтьєса, неважко показати, що умова (2) рівносильна умові

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x l(t)d\psi(t)}{l(x)\psi(x)} < 1, \tag{5}$$

або за умови неперервності функції ψ на $[1, +\infty)$ — умові

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x v(t)/t\, dt}{v(x)} < 1, \tag{6}$$

де $v(x) = xl\big(\psi^{-1}(x)\big)$. Справді,

$$\frac{1}{\psi(x)l(x)} \int_1^x l(t)d\psi(t) = 1 - \frac{\int_1^x \psi(t)dl(t)}{\psi(x)l(x)} = 1 - \frac{L(x)}{\psi(x)l(x)},$$

а отже, умова (2) рівносильна (5). Далі,

$$\int_1^x l(t)d\psi(t) = \int_{\psi(1)}^{\psi(x)} l\big(\psi^{-1}(t)\big)dt = \int_{\psi(1)}^{\psi(x)} \frac{v(t)}{t}dt,$$

і оскільки $v\big(\psi(x)\big) = \psi(x)l\Big(\psi^{-1}\big(\psi(x)\big)\Big) = \psi(x)l(x)$, то умова (5) еквівалентна (6).

Зауваження 3.1. *Введення у розгляд функції v дає змогу навести просту достатню умову для виконання (6), а отже і (2). Якщо для деякого $\rho > 1$ $\varlimsup_{x\to+\infty} v(x)/x^\rho < \rho \varliminf_{x\to+\infty} v(x)/x^\rho$, то справджується (6).*

Позначимо через $n(x)$ і $N(x)$ відповідно лічильну та неванліннову лічильну функції послідовності точок (a_n) комплексної площини, $a_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Зауваження 3.2. *З наслідку 2.1 і формули $N(x) = \int_1^x n(t)d\ln t$ отримуємо, що $N(x)$ є пов. зр. функцією тоді і тільки тоді, коли $n(x) = o\big(N(x)\big),\ x \to +\infty$ (див. [4]).*

Добре відомо, що коли $n(x)$ — пов. зр., то $N(x)$ також пов. зр. функція. Навпаки не завжди правильно. З теореми 2 випливає достатня умова пов. зр. функції $n(x)$.

Твердження 3.1. *Якщо для деякої зростаючої функції ψ інтеграл $\int_1^x \psi(t)dn(t)$ є пов. зр. функцією, то $n(x)$ — пов. зр.*

Нехай f — ціла функція нульового порядку така, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,1/f)\ln r}{N(r,1/f)} < +\infty. \tag{7}$$

Завдяки (7) і формулі $N(r,1/f) = \int_1^r n(t,1/f)d\ln t$, з теореми 2 випливає, що $N(r,1/f)$ є пов. зр. функцією, а отже (див. [1]), і функція $T(r,f)$ — пов. зр. Враховуючи теорему A отримаємо таке твердження.

Твердження 3.2. *Якщо f — ціла функція нульового порядку, яка задовольняє умову (7), то f не має скінченних валіронових виняткових значень.*

Нехай f — мероморфна в $\mathbb{C}$ функція, для якої

$$\overset{\circ}{A}(r,f) = o(\overset{\circ}{T}(r,f)), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Із зображення $\overset{\circ}{T}(r,f) = \int_0^r \overset{\circ}{A}(t,f)d\ln t$ і наслідку 1.1 отримуємо, що $\overset{\circ}{T}(r,f)$ — пов. зр. функція. Оскільки (див., наприклад, [2, с. 33]) $|T(r,f) - \overset{\circ}{T}(r,f)| \le C$, де C — деяка стала, то $T(r,f)$ — пов. зр. Звідси і з теореми B випливає наступне твердження.

Твердження 3.3. *Якщо f — мероморфна в $\mathbb{C}$ функція, для якої виконується (8) і ∞ є винятковим неванлінновим значенням, то за асимптотичну криву, на якій $f(z) \to \infty$, можна взяти для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi)$ промінь $\{z : \arg z = \theta\}$.*

Література

1. Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В. *Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка* // Матем. заметки. — 1983. — Т. 34, № 2. — С. 227–236.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций — М.: Наука. — 1970. — 592 с.
3. Заболоцький М.В. *Повільне зростання інтегралів Стільтьєса* // Крайові задачі для диференціальних задач. Збірник наук. праць, Чернівці. — 2001. — Вип. 7. — С. 71–75.
4. Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н. *О медленном возростании основных характеристик целых функций* // Матем. заметки. — 1999. — Т.65, №2. — С. 206–214.
5. Anderson J.M. *Asymptotic values of meromorphic functions of smooth growth*, Glasgow Math. J., **20**, 2 (1979), 155–162.
6. Hayman W.K. *On Iversen's theorem for meromorphic functions with few poles*, Act. Math, **141**, (1978), 115–145.
7. Hayman W.K. *Slowly growing integral and subharmonic function*, Comment. Math. Helv., **34**, 1 (1960), 75–84.
8. Valiron G. *Sur les valuers deficientes des fouctions algebroides meromorphes d'ordre nul*, J. d'Analyse Math, **1**, (1951), 28–42.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *matmod@franko.lviv.ua*

Надійшло 1.12.2011

Zabolotskyi M.V., Kostiuk O.V. *Slow growing of Stieltjes integrals of monotone functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 43–48.

We establish necessary and sufficient conditions for slow growth of Stieltjes integral of monotone functions. Obtained results are applied to studying of value distribution and growth of Nevanlinna characteristics of meromorphic functions in $\mathbb{C}$.

Заболоцкий Н.В., Костюк О.В. *Медленный рост интегралов Стильтьеса от монотонных функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 43–48.

Найдены необходимые и достаточные условия на монотонные функции ψ и l, при которых интеграл Стильтьеса $L(x) = \int_1^x \psi(t) dl(t)$ является медленно возрастающей функцией. Полученные результаты применены для исследования распределения значений и роста неванлинновских характеристик мероморфных в $\mathbb{C}$ функций.