Карпатські математичні публікації. Т.4, №2 | Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.95

Коркуна О.Є.

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА З ІНТЕГРАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Коркуна О.Є. *Мішана задача для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 275–283.

В обмеженій області розглянуто мішану задачу для нелінійного рівняння типу Ейдельмана, яке містить інтегральний доданок. Доведено існування та єдиність розв'язку цієї задачі в просторах Соболєва. Встановлено деякі оцінки цього розв'язку, залежно від вигляду ядра оператора.

Рівняння типу Ейдельмана є узагальненням параболічних за Петровським рівнянь на випадок, коли диференціювання за різними просторовими змінними має різну вагу порівняно з диференціюванням за часовою змінною. Задачу Коші для лінійних рівнянь такого типу розглянуто в [1, 2, 3, 12]. Встановленню розв'язності задачі Коші чи мішаних задач для рівнянь типу Ейдельмана зі степеневими нелінійностями присвячено праці [5, 6, 7, 11], а отриманню певних оцінок розв'язків для рівнянь такого типу в необмежених областях – [7, 11].

У даній роботі використавши метод Гальоркіна знайдено умови, за яких існує та єдиний розв'язок з просторів Соболєва мішаної задачі для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком. Встановлено деякі оцінки цього розв'язку, які залежать від ядра інтегрального доданка. Зауважимо, що розв'язності мішаних задач для деяких параболічних та гіперболічних рівнянь з інтегральними доданками присвячено праці [10, 13, 14, 15].

Нехай $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ і $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^m$ — обмежені області, причому $\partial\mathcal{D}_x \in C^1$ і $\partial\mathcal{D}_y \in C^1$.

Введемо позначення: $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$, $T < \infty$.

В області Q_T розглянемо мішану задачу

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j}$$
$$+c(z,t)|u|^{r-2}u + \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_iz_i}(z,s)ds = f(z,t), \qquad (1)$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.
Ключові слова і фрази: нелінійне рівняння типу Ейдельмана, узагальнений розв'язок, мішана задача.

© Коркуна О.Є., 2012

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)} = 0, \tag{2}$$

$$u(z,0) = u_0(z), \tag{3}$$

де $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $n = k+m$, ν — зовнішня нормаль до $\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(z,t) \geq a_0 > 0$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$;

(B): $b_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geq b_0|\xi|^2$, $b_0 > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ і майже для всіх $(z,t) \in Q_T$;

(C): $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(z,t) \geq c_0 > 0$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$;

(G): $g \in C^1([0,T])$;

(F): $f \in L^2(Q_T)$;

(U): $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_{0x_ix_j} \in L^2(\mathcal{D}_x)$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$.

Введемо простір:

$$V_0(\Omega) = \left\{u : u \in H_0^1(\Omega) \cap L^r(\Omega), u_{x_ix_j} \in L^2(Q_T), i,j \in \{1,\dots,k\}, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y} = 0\right\}.$$

Означення 1. *Функцію u, яка задовольняє включення $u \in L^2(0,T;V_0(\Omega)), u_t \in L^2(Q_T)$ й інтегральну рівність*

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}v_{z_j} + c(z,t)|u|^{r-2}uv$$
$$- \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}(z,s)ds\, v_{z_i}(z,t) - f(z,t)v\Bigg]dxdt = 0$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, для всіх функцій $v \in C([0,T];C_0^2(\Omega))$, і початкову умову (3), назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G), (F), (U) і, крім того, $b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$, a_{ijt}, b_{ijt}, $c_t \in L^\infty(Q_T)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).*

Доведення. Розглянемо послідовність $\{\varphi^s\}_{s=1}^\infty$ таку, що $\varphi^s \in V_0(\Omega)$ для довільного $s \in \mathbb{N}$; функції $\varphi^1,\dots,\varphi^l$ — лінійно незалежні для довільного $l \in \mathbb{N}$; лінійні комбінації $\{\varphi^s\}_{s=1}^\infty$ — щільні в $V_0(\Omega)$.

Нехай $u^N(z,t) = \sum\limits_{s=1}^{N} c_s^N(t)\varphi^s(z)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_1^N,\dots,c_N^N$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int_{\Omega_\tau}\Bigg[u_t^N\varphi^s(z) + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}^N\varphi_{x_ix_j}^s(z) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}^N\varphi_{z_j}^s(z) + c(z,t)|u^N|^{r-2}u^N\varphi^s(z)$$

$$-\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n u^N_{z_i}(z,s)\varphi^s_{z_i}(z)ds - f(z,t)\varphi^s(z)\Bigg]dz = 0, \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$c^s_N(0) = u^N_{0,s}, \tag{5}$$

$$u^N_0(z) = \sum_{s=1}^N u^N_{0,s}\varphi^s(z).$$

На підставі теореми Каратеодорі [4, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (4), (5) на проміжку $[0,t_N]$, $t_N\in(0,T]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_N = T$.

Домножимо рівність (4) на $c^N_s(t)$, підсумуємо за s від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ. Отримаємо

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u^N_t u^N + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)|u^N_{x_ix_j}|^2 + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(z,t)u^N_{z_i}u^N_{z_j} + c(z,t)|u^N|^r$$

$$-\left(\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n u^N_{z_i}(z,s)ds\right)u^N_{z_i}(z,t) - f(z,t)u^N\Bigg]dzdt = 0. \tag{6}$$

Оскільки виконуються умови (A), (B), (C), (G) та

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int_{Q_\tau} u^N_t u^N dzdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^N|^2dz - \int_{\Omega_0}|u^N_0(z)|^2dz;$$

$$\mathcal{I}_2 \equiv \int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)|u^N_{x_ix_j}|^2dzdt \ge a_0\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^k|u^N_{x_ix_j}|^2dzdt;$$

$$\mathcal{I}_3 \equiv \int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(z,t)u^N_{z_i}u^N_{z_j}dzdt \ge b_0\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{z_i}|^2dzdt;$$

$$\mathcal{I}_4 \equiv \int_{Q_\tau} c(z,t)|u^N|^r dzdt \ge c_0\int_{Q_\tau}|u^N|^r dzdt;$$

$$\mathcal{I}_5 \equiv -\int_{Q_\tau}\left(\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n u^N_{z_i}(z,s)ds\right)u^N_{z_i}(z,t)dzdt$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_0^\tau g\,\square\,\nabla_z u^N dt - \left(\int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\cdot\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{z_i}(z,t)|^2dzdt,$$

де $g\,\square\,\nabla_z u \equiv \int_{\Omega_\tau}\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n|u_{z_i}(z,s) - u^N_{z_i}(z,t)|^2dsdz$,

$$\mathcal{I}_6 \equiv \int_{Q_\tau} f(z,t)u^N dzdt \le \int_{Q_\tau}\left[\frac{|f(z,t)|^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2}|u^N|^2\right]dzdt \le \int_{Q_\tau}\left[\frac{|f(z,t)|^2}{2\delta} + \frac{\delta C}{2}\sum_{i=1}^n|u^N_{z_i}|^2\right]dzdt,$$

то з (6) матимемо

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^N(z,\tau)|^2dz + a_0\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^k|u^N_{x_ix_j}|^2dzdt + \left(b_0 - \frac{\delta C}{2} - \int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^n|u^N_{z_i}|^2dzdt$$

$$+c_0\int_{Q_\tau}|u^N|^r dzdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau g\,\square\,\nabla_z u^N dt \le \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u^N_0(z)|^2dz + \frac{1}{2\delta}\int_{Q_\tau}|f(z,t)|^2dzdt. \tag{7}$$

Виберемо δ так, щоб $b_0 - \dfrac{\delta C}{2} - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$. Тоді з (7) отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} |u^N(z,\tau)|^2 dz + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_ix_j}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |u^N_{z_i}|^2 + |u^N|^r \right] dzdt + \int_0^\tau g \,\Box\, \nabla_z u dt$$

$$\le M_1 \left[\int_{\Omega_\tau} |u_0^N(z)|^2 dz + \int_{Q_\tau} |f(z,t)|^2 dzdt \right], \tag{8}$$

де стала M_1 не залежить від N.

Продиференціюємо рівність (4) за t, домножимо на $c^N_{st}(t)e^{-\nu t}$, де $\nu > 0$, підсумуємо за s від 1 до N, проінтегруємо за t від 0 до τ. Отримаємо

$$\int_{\Omega_\tau} \Bigg[u^N_{tt}u^N_t + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u^N_{x_ix_jt}|^2 + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ijt}(z,t)u^N_{x_ix_j}u^N_{x_ix_jt}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u^N_{z_it}u^N_{z_jt} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(z,t)u^N_{z_i}u^N_{z_it} + c_t(z,t)|u^N|^{r-2}u^N u^N_t + (r-1)c(z,t)|u^N|^{r-2}(u^N_t)^2$$

$$-g(0)\sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}u^N_{z_it} - \left(\int_0^t g'_t(t-s) \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i}(z,s)ds \right) u^N_{z_it} - f_t(z,t)u^N_t \Bigg] e^{-\nu t} dzdt = 0. \tag{9}$$

Оцінимо кожний доданок цієї рівності окремо:

$$\mathcal{I}_7 = \int_{Q_\tau} u^N_{tt}u^N_t e^{-\nu t}dzdt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu\tau}dz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} (u^N_t)^2 dz\Big|_{t=0} + \frac{\nu}{2}\int_{Q_\tau} (u^N_t)^2 e^{-\nu\tau}dzdt.$$

$$\mathcal{I}_8 = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)|u^N_{x_ix_jt}|^2 e^{-\nu t}dzdt \ge a_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_ix_jt}|^2 e^{-\nu t}dzdt.$$

$$\mathcal{I}_9 = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} a_{ijt}(z,t)u^N_{x_ix_j}u^N_{x_ix_jt}e^{-\nu t}dzdt$$

$$\le \frac{\delta}{2}\int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} (u^N_{x_ix_jt})^2 e^{-\nu t}dzdt + \frac{a^1}{2\delta}\int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} |u^N_{x_ix_j}|^2 e^{-\nu t}dzdt,$$

де $a^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} a^2_{ijt}$.

$$\mathcal{I}_{10} = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u^N_{z_it}u^N_{z_jt}e^{-\nu t}dzdt \ge b_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_it})^2 e^{-\nu t}dzdt.$$

$$\mathcal{I}_{11} = \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(z,t)u^N_{z_i}u^N_{z_it}e^{-\nu t}dzdt \le \frac{\delta}{2}\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_it})^2 e^{-\nu t}dzdt + \frac{1}{2\delta}b^1 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{z_i})^2 e^{-\nu t}dzdt.$$

$$\mathcal{I}_{12} = \int_{Q_\tau} c_t(z,t)|u^N|^{r-2}u^N u^N_t e^{-\nu t}dzdt \le \frac{\delta}{2}\int_{Q_\tau} |u^N|^{r-2}(u^N_t)^2 e^{-\nu t}dzdt + \frac{c^1}{2\delta}\int_{Q_\tau} |u^N|^r e^{-\nu t}dzdt,$$

де $c^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} c^2_t(z,t)$, $b^1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} b^2_{ij}(z,t)$,

$$\mathcal{I}_{13} = \int_{Q_\tau} (r-1)c(z,t)|u^N|^{r-2}(u^N_t)^2 e^{-\nu t}dzdt \ge (r-1)c_0 \int_{Q_\tau} |u^N|^{r-2}(u^N_t)^2 e^{-\nu t}dzdt.$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{14} &= -\int_{Q_\tau}\left[g(0)\sum_{i=1}^{n}u^N_{z_i}(z,t)u^N_{z_it}(z,t)+\left(\int_0^t g'_t(t-s)\sum_{i=1}^{n}u^N_{z_i}(z,s)ds\right)u^N_{z_it}\right]e^{-\nu t}dzdt \\
&= -\int_{Q_\tau}\left[g(0)\sum_{i=1}^{n}u^N_{z_i}(z,t)u^N_{z_it}(z,t)-\left(\int_0^t g'_s(t-s)\sum_{i=1}^{n}u^N_{z_i}(z,s)ds\right)u^N_{z_it}\right]e^{-\nu t}dzdt \\
&= -\int_{Q_\tau}\left(\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n}u^N_{z_is}(z,s)ds\right)u^N_{z_it}e^{-\nu t}dzdt-\int_{Q_\tau}g(t)\sum_{i=1}^{n}u^N_{z_i}(z,0)u^N_{z_it}e^{-\nu t}dzdt \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^\tau g\,\square\,\nabla_z u^N_t dt-\left(\int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\cdot\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{z_it}(x,t)|^2e^{-\nu t}dzdt \\
&\quad -\frac{\delta}{2}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{z_it})^2e^{-\nu t}dzdt-\frac{1}{2\delta}\int_{Q_\tau}(g(t))^2\sum_{i=1}^{n}(u^N_{0z_i})^2e^{-\nu t}dzdt.
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{I}_{15} = -\int_{Q_\tau}f_t(z,t)u^N_te^{-\nu t}dzdt \geq -\frac{1}{2\delta}\int_{Q_\tau}(f_t(z,t))^2e^{-\nu t}dzdt-\frac{\delta}{2}\int_{Q_\tau}(u^N_t)^2e^{-\nu t}dzdt.
$$

З (5) при $t=0$ випливає, що

$$
\int_{\Omega_0}(u^N_t)^2\Big|_{t=0}dz+\int_{\Omega_0}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,0)(u^N_{x_ix_j}(z,0))^2+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(z,0)(u^N_{z_i}(z,0))^2
$$

$$
+c(z,0)|u^N(z,0)|^r-f(z,0)u^N(z,0)\Bigg]dz=0.
$$

Звідси, $\int_{\Omega_0}(u^N_t)^2\Big|_{t=0}dz \leq M$, де стала M не залежить від N.

Врахувавши оцінки $\mathcal{I}_7$–$\mathcal{I}_{15}$, отримуємо оцінку

$$
\int_{\Omega_\tau}(u^N_t)^2e^{-\nu\tau}dz+(\nu-\delta)\cdot\int_{Q_\tau}(u^N_t)^2e^{-\nu\tau}dzdt+(2a_0-\delta)\cdot\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u^N_{x_ix_jt}|^2e^{-\nu t}dzdt
$$

$$
+\left(2b_0-2\delta-2\int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\cdot\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{z_it})^2e^{-\nu t}dzdt
$$

$$
+((r-1)c_0-\delta)\int_{Q_\tau}|u^N|^{r-2}(u^N_t)^2e^{-\nu t}dzdt+\int_0^\tau g\,\square\,\nabla_z u^N_t dt
$$

$$
\leq \frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau}(f_t(z,t))^2e^{-\nu t}dzdt+\int_{\Omega_0}(u^N_t)^2dz\Big|_{t=0}+\frac{a^1}{\delta}\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u^N_{x_ix_j}|^2e^{-\nu t}dzdt+M
$$

$$
+\frac{1}{\delta}b^1\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{z_i})^2e^{-\nu t}dzdt+\frac{c^1}{\delta}\int_{Q_\tau}|u^N|^re^{-\nu t}dzdt+\frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau}(g(t))^2\sum_{i=1}^{n}(u^N_{0z_i})^2e^{-\nu t}dzdt. \qquad (10)
$$

Виберемо $\delta=\min\left\{a_0;\frac{b_0}{2}-\int_0^\infty g(\xi)d\xi;(r-1)c_0\right\}$, а $\nu=\delta+1$. Праву частину рівності (10) оцінимо врахувавши оцінку (8). Маємо:

$$
\int_{\Omega_\tau}(u^N_t)^2dz+\int_{Q_\tau}\left((u^N_t)^2+\sum_{i,j=1}^{k}(u^N_{x_ix_jt})^2+\sum_{i=1}^{n}(u^N_{z_it})^2+|u^N|^{r-2}(u^N_t)^2\right)dzdt
$$

$$
+\int_0^\tau g\,\square\,\nabla_z u^N_t dt \leq M_2\left(\int_{\Omega_0}(u^N_0(z))^2dz+\int_{Q_\tau}[|f(z,t)|^2+|f_t(z,t)|^2]dzdt\right), \qquad (11)
$$

де стала M_2 не залежить від N.

З оцінок (8) та (11) випливають такі збіжності деякої підпослідовності послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ (збережемо за нею те саме позначення) при $N \to \infty$.

$$\begin{aligned}
&u_t^N \to u_t \ * \text{ слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\
&u_{x_ix_j}^N \to u_{x_ix_j} \text{ слабко в } L^2(Q_T) \ (i,j=1,\dots,k) \\
&u_{z_it}^N \to u_{z_it} \text{ слабко в } L^2(Q_T) \ (i=1,\dots,n) \\
&u^N \to u \text{ слабко в } L^2(0,T;V_0(\Omega)).
\end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки з (12) випливає, що $u^N \to u$ слабко в $L^2(Q_T)$ та $u_{z_i}^N \to u_{z_i}$; $u_{z_it}^N \to u_{z_it}$ слабко в $L^2(Q_T)$, то за лемою 1.3 [9] $u^N \to u$ сильно в $L^2(Q_T)$ і майже скрізь. Тому, $|u^N|^{r-2}u^N \to |u|^{r-2}u$ слабко в $L^r(Q)$. Далі, врахувавши збіжності (12), аналогічно, як в [8], доводимо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). □

Єдиність розв'язку

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (G), $b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi > 0$. Тоді задача* (1)–(3) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Нехай існує два розв'язки задачі (1)–(3) u^1 та u^2. Позначимо $u = u^1 - u^2$. Кожна з функцій u^1 та u^2 задовольняє означення 1. Тоді функція u задовольняє рівність

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_t u + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)(u_{x_ix_j})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)(u_{z_i})^2 + c(z,t)(|u^1|^{r-2}u^1 - |u^2|^{r-2}u^2)u$$
$$- \int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^{n} u_{z_i}(z,s)ds\cdot u_{z_i}(z,t)\Bigg] = 0$$

та початкову умову $u(z,0) = 0$.

Провівши оцінки цієї рівності аналогічно до оцінок $\mathcal{I}_1$–$\mathcal{I}_5$ та врахувавши, що

$$\int_{Q_\tau}[c(z,t)(|u^1|^{r-2}u^1 - |u^2|^{r-2}u^2)u]dzdt \ge 0,$$

знайдемо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u|^2dz + a_0\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{k}|u_{x_ix_j}|^2dzdt + \left(b_0 - \int_0^\infty g(\xi)d\xi\right)\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{z_i}|^2dzdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau g \,\square\, \nabla_z u dt \le 0.$$

Звідси випливає, що $u^1 \equiv u^2$. □

Оцінка розв'язку

Теорема 3. *Нехай u — розв'язок задачі* (1)–(3), *крім того, $a_{ij}(z,t) = a_{ij}(z)$, $b_{ij}(z,t) = b_{ij}(z)$, $f \equiv 0$, $c(z,t) = c(z)$. Тоді*

1) якщо існує така стала $c > 0$, що $g(t) \le g(0)e^{-ct}$, то

$$\int_{\Omega_t}[u^2 + u_t^2]dz \le \left(\int_{\Omega_0}[u^2 + u_t^2]dz + \frac{M}{\delta|\mu - 2c|}\right)e^{-\kappa t},$$

де $\mu = \frac{2a_0}{c_2^2} + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right)$, $M = \int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u_{0z_i})^2dz$;

2) якщо $g'(t) \le -c_3[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}$, $p \ge 1$, $c_3 > 0$, то існує така стала $c_4 \ge 0$, що для розв'язку задачі (1)–(3) *виконується оцінка*

$$\int_{\Omega_t}[u^2 + u_t^2]dz \le \frac{c_4}{(t+1)^{2p-1}}.$$

Доведення. Нехай $\nu = 0$. Тоді, провівши аналогічні оцінки, як $\mathcal{I}_1$–$\mathcal{I}_{14}$, знайдемо

$$\left(\int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2)dz\right)_t + 2a_0 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{k} (|u^N_{x_i x_j}|^2 + |u^N_{x_i x_j t}|^2)dz$$

$$+\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right) \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} ((u^N_{z_i t})^2 + (u^N_{z_i})^2)dz$$

$$+2c_0 \int_{\Omega_\tau} (u^N)^r dz + (r-1)c_0 \int_{\Omega_\tau} |u^N|^{r-2}(u_t^N)^2 dz + g \,\square\, \nabla_z u + g \,\square\, \nabla_z u_t^N$$

$$\le \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\tau} (g(t))^2 \sum_{i=1}^{n} (u^N_{0z_i})^2 dz. \tag{13}$$

Оскільки для функцій u^N та u_t^N виконуються нерівності Фрідріхса:

$$\int_{\Omega_\tau} u^N dz \le c_1 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i} dz, \qquad \int_{\Omega_\tau} u^N_t dz \le c_1 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} u^N_{z_i t} dz,$$

де стала c_1 не залежить від u, N, а залежить тільки від n та Ω, то, врахувавши невід'ємність 4, 5, 6, 7 доданків, а також, що

$$\int_{\Omega_\tau} \left(\sum_{i=1}^{k} (u^N_{x_i})^2\right) dz \le c_2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} (u^N_{x_i x_i})^2 dz,$$

$$\int_{\Omega_\tau} (u^N)^2 dz \le c_2^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} (u^N_{x_i x_i})^2 dz,$$

$$\int_{\Omega_\tau} (u^N_t)^2 dz \le c_2^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} (u^N_{x_i x_i t})^2 dz,$$

з (13) знайдемо

$$\left(\int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2)dz\right)_t + \left(\frac{1}{c_2^2} \cdot 2a_0 + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right)\right) \int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2)dz$$

$$\le \frac{1}{\delta}(g(t))^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{0z_i})^2 dz.$$

Позначимо

$$s(\tau) = \int_{\Omega_\tau} (|u^N|^2 + |u_t^N|^2)dz, \qquad \mu = \frac{2a_0}{c_2^2} + \frac{1}{c_1}\left(2b_0 - 2\int_0^\infty g(\xi)d\xi - \delta\right).$$

З умови задачі можемо вибрати δ так, щоб $\mu > 0$. Матимемо нерівність

$$s'(t) \le -\mu s(t) + \frac{1}{\delta}(g(t))^2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{0z_i})^2 dz. \tag{14}$$

Розглянемо такі випадки:

1) $g(t) \le g(0)e^{-ct}$

Тоді з (14) знайдемо $s'(t) \le -\mu s(t) + \frac{1}{\delta} e^{-2ct} M$, де $M = \int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (u^N_{0z_i})^2 dz$.

Розв'яжемо цю нерівність подібно як в [13, с. 109]: $(se^{\mu t})' \le \frac{1}{\delta}Me^{(\mu-2c)t}$. Інтегруємо по t від 0 до τ:

$$s(\tau) \le s(0)e^{-\mu\tau} + \frac{M}{\delta(\mu-2c)}e^{-2c\tau} - \frac{M}{\delta(\mu-2c)}e^{-\mu\tau}.$$

Звідси, якщо $\mu > 2c$, то $e^{-\mu\tau} < e^{-2c\tau}$ та $s(\tau) \le \left(s(0) + \frac{M}{\delta(\mu-2c)}\right)e^{-2c\tau}$.

У іншому випадку ($\mu < 2c$)

$$s(\tau) \le \left(s(0) + \frac{M}{\delta(2c-\mu)}\right)e^{-\mu\tau}.$$

Отже, маємо оцінку

$$s(\tau) \le \left(s(0) + \frac{M}{\delta|\mu-2c|}\right)e^{-\kappa\tau},$$

де $\kappa = \min\{2c;\mu\}$.

2) Нехай $g'(t) \le -c_3[g(t)]^{1+\frac{1}{\nu}}$, $\nu \ge 1$.

Тоді $g(t) \le \dfrac{k}{(t+1)^\nu}$, де $k = g(0)$, коли $p < c_2[g(0)]^{1/\nu}$ і $k = \left(\dfrac{\nu}{c^2}\right)^\nu$, коли $\nu > c_2[g(0)]^{1/\nu}$. Позначимо $q = 2\nu - 1$,

$$c_3 = \left(\max\left\{s(0);\ \frac{k^2}{\mu\delta}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n (u_{0z_i}^N)^2 dz\right\}\right)^{-1/q}.$$

Тоді, оскільки $-\mu s(t) < -\mu c_3 s(t)^{1/q-1}$, то з (14) отримаємо оцінку

$$s'(t) \le -\mu c_3(s(t))^{1/q+1} + \frac{k_1}{(1+t)^{1+q}},$$

де $k_1 = \dfrac{k^2}{\delta}\displaystyle\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n (u_{0z_i}^N)^2 dz$.

Розв'язавши цю нерівність аналогічно до [14, с.16], отримаємо $s(t) \le \frac{M_3}{(t+1)^{2\nu-1}}$, де стала M_3 залежить від $s(0)$.

Оскільки

$$\int_{\Omega_\tau}(u^2 + u_t^2)dz \le \lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_\tau}[(u^N)^2 + (u_t^N)^2]dz,$$

то звідси випливає твердження теореми 3. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д. *Про властивості розв'язків $\vec{2b}$–параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2002. — Т.45, №4. — С. 19–26.

2. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. *$\vec{2b}$–параболические системы* // Труды семинара по функц. анализу. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1968. — Вып.1. — С. 3–175.

3. Івасишен С.Д., Кондур О.С. *Про аналітичність розв'язків 2b–параболічних систем* // Укр. мат. журн. — 2006. — Т.58, №2. — С. 160–167.

4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.

5. Коркуна О.Є. *Задача Коші для напівлінійного параболічного за Ейдельманом рівняння* // Укр. мат. журн. — 2008. — Т.60, №5. — С. 586–602.

6. Коркуна О.Є., Лавренюк С.П. *Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області* // Доповіді НАН України. — 2008. — Вип.4. — С. 24–30.

7. Коркуна О., Лавренюк С. *Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного* $2b$*-параболічного рівняння* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2007. — Вип.67. — С. 153–165.

8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.

9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

10. Процах Н. П. *Мішана задача для ультрапараболічного рівняння з оператором пам'яті в нециліндричній області* // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2010. — Вип.8. — С. 60–70.

11. Торган Г. Р. *Неіснування глобального розв'язку змішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана* // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2008. — Вип.6. — С. 98–103.

12. Эйдельман С. Д. *Об одном классе параболических систем* // Доклады АН СССР. — 1960. — Т.133, №1. — С. 40–43.

13. Protsakh N. P. *Properties of solution for mixed problem for ultraparabolic equation with the memory term*, Ukr. Math. Bul., **9**, 1 (2012), 98–113.

14. Santos M. L. *On the wave equations with memory in noncylindrical domains*, Electronic Journal of Differential Equations, **2007**, 128 (2007), 1–18.

15. Santos M. L., Rocha M. P. C., Braga P. L. O. *Global solvability and asymptotic behaviour for a nonlinear coupled system of viscoelastic waves with memory in a noncylindrical domain*, J. Math. Anal. Appl., **325** (2007), 1077–1094.

Національний лісотехнічний університет України,
Львів, Україна
e-mail: *olesya.korkuna@gmail.com*

Надійшло 01.06.2012

Korkuna O.E. *Mixed problem for nonlinear Eidelman equation with integral term*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 275–283.

The mixed problem for the nonlinear Eidelman type equation containing the integral term is considered in a bounded domain. The existence and uniqueness of solution of this problem in Sobolev's space are proved. Some estimates of this solution are setted depending on the kernel of the operator.

Коркуна О.Е. *Смешанная задача для нелинейного уравнения типа Эйдельмана с интегральным слагаемым* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 275–283.

В ограниченной области рассмотрено смешанную задачу для нелинейного уравнения типа Эйдельмана, которая имеет интегральное слагаемое. Доказано существование и единственность решения этой задачи в пространствах Соболева. Установлено некоторые оценки этого решения, в зависимости от вида ядра оператора.