

КУЛЯВЕЦЬ Л.В.¹, МУЛЯВА О.М.²

ПРО ЗРОСТАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

У термінах узагальнених порядків досліджено зв'язок між зростанням цілого ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\} \text{ і зростанням цілих рядів Діріхле } F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}, 1 \leq j \leq 2,$$

якщо коефіцієнти a_n пов'язані з коефіцієнтами $a_{n,j}$ певними співвідношеннями.

Ключові слова і фрази: ряд Діріхле, узагальнений порядок.

¹ Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine

² National University of Food Technologies, 68 Volodymyrska str., 01601, Kyiv, Ukraine

E-mail: lubov.kulyavets@gmail.com (Кулявець Л.В.), info@nuft.edu.ua (Мулява О.М.)

ВСТУП

Для цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ нехай $\varrho[f]$ — її порядок, а $\sigma[f]$ — тип. Використовуючи формули Адамара для знаходження цих величин, Е. Келіс [1] довів дві такі теореми.

Теорема А. Нехай функції $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n$ і $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,2} z^n$ є скінченного порядку, мають регулярне зростання (в розумінні рівності порядку $\varrho[f]$ та нижнього порядку $\lambda[f]$) і послідовності $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$ є неспадними для $n \geq n_0$. Тоді, якщо $\ln(1/|a_n|) = (1 + o(1))\sqrt{\ln(1/|a_{n,1}|) \ln(1/|a_{n,2}|)}$ при $n \rightarrow \infty$, то функція f має регулярне зростання і $\varrho[f] = \sqrt{\varrho[f_1]\varrho[f_2]}$.

Теорема Б. Нехай цілі функції f_1 і f_2 з теореми А мають однаковий порядок $\varrho[f_1] = \varrho[f_2] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $\sigma[f_1] = \sigma_1$, $\sigma[f_2] = \sigma_2$. Припустимо, що $a_{n,1} \neq 0$ і $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$, де l — повільно змінна функція. Тоді, якщо $|a_n| = (1 + o(1))\sqrt{|a_{n,1}||a_{n,2}|}$ при $n \rightarrow \infty$, то функція f має порядок $\varrho[f] = \varrho$ і тип $\sigma[f] \leq \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$.

Зауважимо, що дещо раніше Р. Срівастава [4,5] намагався довести теорему Б без умов $a_{n,1} \neq 0$ і $|a_{n,2}| \geq |a_{n,1}|/l(1/|a_{n,1}|)$ для всіх $n \geq n_0$, а теорему А — без умови неспадання послідовностей $(|a_{n,1}/a_{n+1,1}|)$ та $(|a_{n,2}/a_{n+1,2}|)$. На помилковість таких тверджень було вказано в Math. Rev., 1963, Vol. 25, №2204, №2206.

Метою нашої статті є узагальнення теорем А і Б на випадок цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку за М.М. Шереметою, причому замість двох цілих функцій f_1 і f_2 розглядатимемо $n \geq 2$ цілих рядів Діріхле.

УДК 517.537.72

2010 Mathematics Subject Classification: 30B50.

Отже, нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $S(\Lambda)$ — клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

із заданою послідовністю показників (λ_n) , а $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$.

Через L позначимо клас додатних неперервних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α таких, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ для $-\infty < x \leq x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \leq x \rightarrow +\infty$. Будемо говорити, що $a \in L^0$, якщо $a \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{\text{ПЗ}} \subset L^0$.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ узагальненими порядком $\varrho_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім порядком $\lambda_{\alpha\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}, \quad \lambda_{\alpha,\beta}[F] = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}.$$

Важливим у наших дослідженнях є наступний отриманий в [3] результат.

Лема 1. Нехай $0 < p < +\infty$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ — неперервно диференційовні функції і виконується одна з умов:

а) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$, $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} \rightarrow \frac{1}{p}$ ($x \rightarrow +\infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$);

б) $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$, $\varrho_{\alpha,\beta}[F] < +\infty$, $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} = O(1)$ ($x \rightarrow +\infty$) і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ ($n \rightarrow \infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$.

Тоді

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F] =: \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_n/p)}{\beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)},$$

а якщо крім цього $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ і $\frac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$, то

$$\lambda_{\alpha,\beta}[F] = \varkappa_{\alpha,\beta}[F] =: \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_n/p)}{\beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Зауважимо, що для того, щоб $\lambda_{\alpha,\beta}[F] \geq \varkappa_{\alpha,\beta}[F]$ досить, щоб $\alpha(\lambda_{n+1}/p) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p)$ при $n \rightarrow \infty$.

1 УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ А

Припустимо, що $F_j \in S(\Lambda)$ ($2 \leq j \leq m$) і

$$F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}. \quad (2)$$

Теорему А узагальнює така теорема.

Теорема 1. Нехай $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ та $\beta \in L^0$ — неперервно диференційовні функції,

$$\frac{\beta^{-1}(c\alpha(x))}{\ln x} = O(1)$$

при $x \rightarrow +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ при $n \rightarrow \infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, а всі функції (2) мають регулярне $\alpha\beta$ -зростання (тобто $\lambda_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_{\alpha,\beta}[F_j] < +\infty$), послідовності

$$\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$$

при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$ і $\alpha(\lambda_{n+1}) = (1 + o(1))\alpha(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді, якщо

$$\beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right)^{\omega_j}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

де $\omega_j > 0$ і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$, то функція (1) має регулярне $\alpha\beta$ -зростання і

$$\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^m \varrho_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}.$$

Доведення. Оскільки $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$ і $\lambda_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho_j < +\infty$, то

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda_{n+1}/p) &= (1 + o(1))\alpha(\lambda_n/p), \\ \beta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) &= (1 + o(1))\beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ для будь-якого $p \in (0, +\infty)$, і отже, за лемою 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) = \frac{1}{\varrho_j}.$$

Тому з (3) отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \prod_{j=1}^m \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right)^{\omega_j} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right)^{\omega_j} \\ &= \prod_{j=1}^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\varrho_j} \right)^{\omega_j}, \end{aligned}$$

тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right)} = \prod_{j=1}^m \varrho_j^{\omega_j}.$$

Використовуючи лему 1 і зауваження до неї, звідси легко одержуємо, що

$$\prod_{j=1}^m \varrho_j^{\omega_j} = \lambda_{\alpha,\beta}[F] \leq \varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^m \varrho_j^{\omega_j},$$

тобто функція F має регулярне $\alpha\beta$ -зростання і $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^m \varrho_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Теорему 1 доведено. \square

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \geq x_0$, то з означення узагальнених порядку та нижнього порядку випливають відповідно означення R -порядку $\varrho_R[F]$ та нижнього R -порядку $\lambda_R[F]$, а з теореми 1 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. Нехай $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ і $\ln \lambda_{n+1} = (1 + o(1)) \ln \lambda_n$ при $n \rightarrow \infty$, всі функції (2) мають регулярне зростання (тобто $\lambda_R[F_j] = \varrho_R[F_j] < +\infty$) і послідовності

$$\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$$

при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$. Тоді, якщо

$$\ln \frac{1}{|a_n|} = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \ln^{\omega_j} \frac{1}{|a_{n,j}|}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де $\omega_j > 0$ і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$, то функція (1) має регулярне зростання і $\varrho_R[F] = \prod_{j=1}^m \varrho_R[F_j]^{\omega_j}$.

Якщо у степеневому розвиненні цілої функції f зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо цілий ряд Діріхле (1). При цьому $\varrho_R[F] = \varrho[f]$, $\lambda_R[F] = \lambda[f]$, а з наслідку 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 2. Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, а цілі функції $f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,j} z^k$ ($2 \leq j \leq m$) мають регулярне зростання і послідовності $(|a_{k,j}/a_{k+1,j}|) \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$. Тоді за умови (4) функція f має регулярне зростання і $\varrho[f] = \prod_{j=1}^m \varrho[f_j]^{\omega_j}$.

Теорема А випливає з наслідку 2 за умов $m = 2$ і $\omega_j = 1/2$.

2 УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ Б

Припустимо, що, як у теоремі 1, $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ та $\beta \in L^0$ — неперервно диференційовні функції. Для того, щоб отримати узагальнення теореми Б, крім узагальненого порядку $\varrho_{\alpha,\beta}[F] \in (0, +\infty)$ введемо (узагальнений) тип за формулою

$$T_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta(\sigma))}.$$

Оскільки $T_{\alpha,\beta}[F] = \varrho_{\alpha_1,\beta_1}[F]$, де $\alpha_1(x) = x$ і $\beta_1(x) = \alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\alpha(x))$ для $x \geq x_0$, то ми можемо застосувати лему 1. Зауважимо, що $\alpha_1 \in L^0$, а використовуючи теорему Лагранжа, неважко показати, що $\beta_1(\ln x) \in L^0$ за умови $\frac{\ln \beta_1(x)}{x} = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$, тобто за умови

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(\varrho_{\alpha,\beta}[F]\beta(x))}{x} = O(1)$$

при $x \rightarrow +\infty$, яка рівносильна умові

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(x)}{\beta^{-1}(x/\varrho_{\alpha,\beta}[F])} = O(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

З іншого боку, оскільки $\alpha_1(x) = x$, то умова $\frac{\beta_1^{-1}(c\alpha_1(x))}{\ln x} \rightarrow \frac{1}{p}$ ($x \rightarrow +\infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$ рівносильна умові $\frac{\beta_1^{-1}(x)}{\ln x} \rightarrow \frac{1}{p}$ ($x \rightarrow +\infty$), тобто для $p = \varrho_{\alpha,\beta}[F]$ рівносильна умові

$$\frac{\ln \alpha^{-1}(x)}{\beta^{-1}(x/\varrho_{\alpha,\beta}[F])} \rightarrow \varrho_{\alpha,\beta}[F], \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Оскільки з (6) випливає (5), то з леми 1 випливає наступна лема.

Лема 2. Нехай функції $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ та $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні і $\varrho_{\alpha,\beta}[F] \in (0, +\infty)$. Тоді за умов (6) і $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) правильна рівність

$$T_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\varrho_{\alpha,\beta}[F] \alpha^{-1} \left(\varrho_{\alpha,\beta}[F] \beta \left(\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \right)}.$$

Наступна теорема узагальнює теорему Б.

Теорема 2. Нехай функції $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$, $\beta \in L^0$ неперервно диференційовні, виконується умова (6), $\alpha(x) = (1 + o(1)) \ln x$ при $x \rightarrow +\infty$ і $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$). Нехай всі ряди Діріхле (2) мають однаковий узагальнений порядок $\varrho_{\alpha,\beta}[F_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $T_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти ряду Діріхле (1) задовольняють умову

$$\alpha^{-1} \left(\varrho \beta \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \right) = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \alpha^{-1} \left(\varrho \beta \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right)^{\omega_j} \quad (7)$$

при $n \rightarrow \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і

$$\beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \leq (1 + o(1)) \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

для всіх $2 \leq j \leq m$, то ряд Діріхле (1) має узагальнений порядок $\varrho_{\alpha,\beta}[F] = \varrho$ і тип $T_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod_{j=1}^m T_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$.

Доведення. Оскільки $\alpha(x) = (1 + o(1)) \ln x$ ($x \rightarrow +\infty$), то $\ln \alpha^{-1}(x) = (1 + o(1))x$ ($x \rightarrow +\infty$) і з (7) з огляду на умову $\beta \in L^0$ отримуємо

$$\beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) = (1 + o(1)) \sum_{j=1}^m \omega_j \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \sum_{j=1}^m \omega_j \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^m \omega_j \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}. \end{aligned}$$

З іншого боку, з огляду на умову (8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \left(\omega_1 \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right) + \sum_{j=2}^m \omega_j \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(\lambda_n)} \left(\omega_1 \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right) + (1 + o(1)) \sum_{j=2}^m \lambda_j \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right) \right) = \frac{1}{\varrho}. \end{aligned}$$

Нарешті, з огляду на лему 2 і умову (7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{\alpha,\beta}[F]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n} \alpha^{-1} \left(\varrho_{\alpha,\beta}[F] \beta \left(\frac{1}{\varrho_{\alpha,\beta}[F]} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n} \prod_{j=1}^m \alpha^{-1} \left(\varrho \beta \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right)^{\omega_j} \\ &\geq \prod_{j=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varrho_{\alpha,\beta}[F]}{\lambda_n} \alpha^{-1} \left(\varrho \beta \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right) \right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{T_{\alpha,\beta}[F_j]} \right)^{\omega_j}, \end{aligned}$$

тобто $T_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod_{j=1}^m T_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. □

Якщо виберемо $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = x$ для $x \geq x_0$, то з означення $T_{\alpha,\beta}[F]$ випливає означення R -типу $T_R[F]$, а з теореми 2 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3. Нехай $\ln n = o(\lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$), а всі ряди Діріхле (2) мають однаковий R -порядок $\varrho_R[F_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і R -типи $T_R[F_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти ряду Діріхле (1) задовольняють умову $|a_n| = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m |a_{n,j}|^{\omega_j}$ при $n \rightarrow \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і $\ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1 + o(1)) \ln \frac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх $2 \leq j \leq m$, то ряд Діріхле (1) має R -порядок ϱ і R -тип $T_R[F] \leq \prod_{j=1}^m T_R[F_j]^{\omega_j}$.

З наслідку 3 випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, а цілі функції $f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,j} z^k$ ($2 \leq j \leq m$) мають однаковий порядок $\varrho[f_j] = \varrho \in (0, +\infty)$ і типи $\sigma[f_j] \in (0, +\infty)$. Припустимо, що $|a_n| = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m |a_{n,j}|^{\omega_j}$ при $n \rightarrow \infty$, де ω_j — додатні числа і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$. Тоді, якщо $a_{n,1} \neq 0$ для всіх $n \geq n_0$ і $\ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1 + o(1)) \ln \frac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх $2 \leq j \leq m$, то $\varrho[f] = \varrho$ і $\sigma[f] \leq \prod_{j=1}^m \sigma[f_j]^{\lambda_j}$.

Зауважимо, що якщо $|a_{n,j}| \geq |a_{n,1}|/l_j(1/|a_{n,1}|)$, де l_j — повільно змінні функції, то $\ln l_j(x) = o(\ln x)$ при $x \rightarrow +\infty$ і, отже, $\ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \leq (1 + o(1)) \ln \frac{1}{|a_{n,1}|}$ при $n \rightarrow \infty$.

Тому за умов $n = 2$ і $\omega_j = 1/2$ з наслідку 4 випливає теорема Б.

3 ЦІЛІ РЯДИ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО МОДИФІКОВАНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО ПОРЯДКУ

Неперервної диференційовності функцій α та β і умов на похідну функції $\beta^{-1}(c\alpha(x))$ у доведених вище теоремах можна позбутись, якщо дещо модифікувати узагальнені порядки.

Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ модифікованими узагальненими R -порядком $\bar{q}_{\alpha\beta}[F]$ і нижнім R -порядком $\bar{\lambda}_{\alpha\beta}[F]$ цілого ряду Діріхле (1) називаються величини

$$\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha \left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma} \right), \quad \bar{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha \left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma} \right).$$

В [2] отримано наступний результат.

Лема 3. Нехай або $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, і для кожного $c \in (0, +\infty)$ виконується $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ ($n \rightarrow \infty$). Тоді $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F]$, а якщо крім цього $\frac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$ і $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{n+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то $\bar{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = k_{\alpha,\beta}[F]$.

Для модифікованих узагальнених порядків правильна наступна теорема.

Теорема 3. Нехай або $\alpha \in L_{\text{ПЗ}}$ і $\beta \in L^0$, або $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L_{\text{ПЗ}}$, а цілі ряди Діріхле (2) мають модифіковані узагальнені порядки $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0, +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ ($n \rightarrow \infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$. Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову

$$\beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right)^{\omega_j}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

де ω_j — додатні числа і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$. Тоді:

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ і

$$\ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \leq (1 + o(1)) \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right), \quad j = 2, 3, \dots, m, \quad (10)$$

при $n \rightarrow \infty$, то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \beta(\sigma)} \ln \alpha \left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma} \right) = 1 \quad (11)$$

і $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod_{j=1}^m \bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$;

2) якщо $\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$ і $\frac{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_{n+1}))}{\beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n))} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$

для кожних $c \in (0, +\infty)$ та $j = 1, 2, \dots, m$, а функції F_j мають регулярне модифіковане $\alpha\beta$ -зростання, тобто $\bar{\lambda}_{\alpha,\beta}[F_j] = \bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]$, то функція F має регулярне модифіковане

$\alpha\beta$ -зростання і $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^m \bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$.

Доведення. Оскільки $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j] \in (0, +\infty)$, то $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \beta(\sigma)} \ln \alpha \left(\frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma} \right)$. Відомо [5], що якщо $h \in L^0$, то h є RO -зростаючою функцією [4, с. 86], тобто для кожного $l \in [1, +\infty)$ і всіх $x \geq x_0$ правильна нерівність $1 \leq h(lx)/h(x) \leq M(l) < +\infty$, звідки випливає, що $\ln h \in L_{\text{ПЗ}}$. Тому, використовуючи лему 3 з $\ln \alpha$ і $\ln \beta$ замість α і β , за умови $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ ($n \rightarrow \infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$ отримуємо рівність

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) = 1$$

для кожного $j = 1, 2, \dots, m$, а з огляду на (9)

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \sum_{j=1}^m \omega_j \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^m \omega_j \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) = 1. \end{aligned}$$

З іншого боку, з огляду на (10)

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \left(\omega_1 \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right) + \sum_{j=2}^m \omega_j \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right) \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \alpha(n)} \sum_{j=1}^m \omega_j \ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right) = 1, \end{aligned}$$

тобто $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha(n)}{\ln \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right)} = 1$ і за лемою 3 правильна рівність (11).

Далі, оскільки з умови $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(\alpha^c(\lambda_n)))$ ($n \rightarrow \infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$ випливає умова $\ln n = o(\lambda_n \beta^{-1}(c\alpha(\lambda_n)))$ ($n \rightarrow \infty$) для кожного $c \in (0, +\infty)$, то за лемою 3 з (9) маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{q}_{\alpha,\beta}[f]} &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha(n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\alpha(n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n^{(j)}|} \right) \right)^{\omega_j} \\ &\geq \prod_{j=1}^m \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha(n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n^{(j)}|} \right) \right)^{\omega_j} = \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]} \right)^{\omega_j}, \end{aligned}$$

тобто отримуємо нерівність $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] \leq \prod_{j=1}^m \bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Твердження 1) доведено.

Оскільки $\bar{\lambda}_{\alpha,\beta}[F_j] = \bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]$, то за лемою 3 маємо $\frac{1}{\alpha(n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \rightarrow \frac{1}{\bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]}$ при $n \rightarrow \infty$ для кожного $j = 1, 2, \dots, m$. Тому з (9) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) &= (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\alpha(n)} \beta \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \right)^{\omega_j} \\ &= (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]} \right)^{\omega_j}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

звідки за лемою 3 випливає, що функція F має регулярне модифіковане $\alpha\beta$ -зростання і правильна рівність $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] = \prod_{j=1}^m \bar{q}_{\alpha,\beta}[F_j]^{\omega_j}$. Теорему 3 повністю доведено. \square

Якщо виберемо $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$, то $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln \sigma} - 1 = q_l[F] - 1$, де $q_l[F]$ називається логарифмічним порядком. Зрозуміло, що $q_l[F] \geq 1$, а функції $\alpha(x) = \beta(x) = \ln x$ не задовольняють умови леми 1 і застосувати теорему 1 у цьому випадку неможливо. Проте, застосовуючи теорему 3, прийдемо до наступного наслідку.

Наслідок 5. Нехай цілі ряди Діріхле (2) мають логарифмічні порядки $q_l[F_j] \in (1, +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$). Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову

$$\ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right) = (1 + o(1)) \prod_{j=1}^m \ln^{\omega_j} \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

де ω_j — додатні числа і $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$. Тоді:

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ і

$$\ln \ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,j}|} \right) \geq (1 + o(1)) \ln \ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_{n,1}|} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

для всіх $j = 2, 3, \dots, m$, то $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \ln M(\sigma, F)}{\ln \ln \sigma} = 1$ і $q_l[F] - 1 \leq \prod_{j=1}^m (q_l[F_j] - 1)^{\omega_j}$;

2) якщо $\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$ для всіх $j = 1, 2, \dots, m$ і $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ а функції F_j мають регулярне логарифмічне зростання, то функція F має регулярне логарифмічне зростання і $q_l[F] - 1 = \prod_{j=1}^m (q_l[F_j] - 1)^{\omega_j}$.

Справді, з умови $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$ ($n \rightarrow \infty$) випливає умова $\ln n = o(\lambda_n \exp\{\ln^c \lambda_n\})$, ($n \rightarrow \infty$), а з умови $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) — умова

$$\frac{\exp\{c \ln \lambda_{n+1}\}}{\exp\{c \ln \lambda_n\}} \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty),$$

а оскільки $q_l[F] > 1$, то рівності

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \ln M(\sigma, F)}{\ln \ln \sigma} = 1$$

і

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln \ln \sigma} \ln \ln \frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma} = 1$$

є рівносильними. Тому з теореми 3 легко отримуємо висновки наслідку 5.

Якщо ж виберемо $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = \ln x$, то $\bar{q}_{\alpha,\beta}[F] = T[F] =: \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma}$ і $\bar{\lambda}_{\alpha,\beta}[F] = t[F] =: \underline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma}$, а з теореми 3 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 6. Нехай для цілих рядів Діріхле (2) $T[F_j] \in (0, +\infty)$ і $\ln n = o(\lambda_n^2)$ ($n \rightarrow \infty$). Припустимо, що коефіцієнти цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову (12). Тоді:

1) якщо $|a_{n,1}| > 0$ і виконується умова (13), то $\varrho_l[F] = 1$ і $T[F] \leq \prod_{j=1}^m T[F_j]^{\omega_j}$;

2) якщо $\lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\frac{\ln |a_{n,j}| - \ln |a_{n+1,j}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$ при $n_0 \leq n \rightarrow \infty$ і $t[F_j] = T[F_j]$ для всіх $j = 1, 2, \dots, m$, то $t[F] = T[F] = \prod_{j=1}^m T[F_j]^{\omega_j}$.

REFERENCES

- [1] Calys E.G. *A note on the order and type of integral functions*. Riv. Mat. Univ. Parma 1964, **5**, 133–137.
- [2] Kulyavets' L.V., Sheremeta M.M. *On modified generalized order of entire Dirichlet series and characteristic functions of probability laws*. Bull. Lviv Univ., Series Mech.-Math. 2012, **77**, 124–131. (in Ukrainian)
- [3] Sheremeta M.M. *Asymptotic property of entire functions, represented by power series and Dirichlet series*. Abstract of doct. diss., Kyiv, 1987. (in Russian)
- [4] Srivastava R.S.L. *On the order and type of integral functions*. Riv. Mat. Univ. Parma 1959, **10**, 249–255.
- [5] Srivastava R.S.L. *On the order and type of integral functions*. Riv. Mat. Univ. Parma 1961, **2**, 265–270.

Надійшло 12.03.2014

Kulyavets' L.V., Mulyava O.M. *On the growth of a class of entire Dirichlet series*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 300–309.

In terms of generalized orders it is investigated a relation between the growth of an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ and the growth of entire Dirichlet series $F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, provided the coefficients a_n are connected with the coefficients $a_{n,j}$ by some correlations.

Key words and phrases: Dirichlet series, generalized order.

Кулявец Л.В., Мулява О.М. *О росте одного класса целых рядов Дирихле* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 300–309.

В терминах обобщенных порядков исследована связь между ростом целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ и ростом целых рядов Дирихле $F_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} \exp\{s\lambda_n\}$, $1 \leq j \leq 2$, если коэффициенты a_n связаны с коэффициентами $a_{n,j}$ некоторыми соотношениями.

Ключевые слова и фразы: ряд Дирихле, обобщенный порядок.