ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 242–255
doi:10.15330/cmp.6.2.242-255

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.242–255

Ільків В.С., Страп Н.І.

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У БАГАТОВИМІРНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено нелокальну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з оператором $B = (B_1, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, — оператори узагальненого диференціювання за комплексною змінною z_j. Задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі, а також встановлено умови існування та єдиності цього розв'язку у шкалі просторів функцій багатьох комплексних змінних.

Ключові слова і фрази: рівняння з частинними похідними, оператор узагальненого диференціювання, псевдо-диференціальний оператор, малі знаменники, метрична оцінка.

Lviv Polytechnic National University, 12 Bandera str., 79013, Lviv, Ukraine
E-mail: ilkivv@i.ua (Ільків В.С.), n.strap@mail.ru (Страп Н.І.)

Вступ

Дослідження нелокальних крайових задач для різних типів диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними та встановлення умов коректної їхньої розв'язності є одним із важливих напрямів розвитку сучасної теорії рівнянь з частинними похідними [8, 13, 14]. Ці задачі пов'язують значення шуканих розв'язків та їх похідних у різних межових чи внутрішніх точках розглядуваної області. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром [10, 11], а їх розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку.

Багато дослідників (див. [1, 5, 7]) коректність таких задач забезпечують накладанням додаткових обмежень на коефіцієнти рівняння, крайові умови та області, в яких вивчаються задачі. Нелокальні задачі для гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь з частинними похідними за допомогою метричного підходу до оцінки малих знаменників розглядалися у дійсній області, наприклад, у роботах [2, 3, 10], а задача Коші для системи двох анізотропних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами — у праці [6]. Особливістю цієї роботи є дослідження нелокальної задачі для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B = (B_1, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, що діє на функції просторових комплексних змінних $(z_1, \dots, z_p)$.

УДК 517.946+511.37
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 35E05.

У роботі [4] розглянуто таку задачу для одного диференціально-операторного рівняння з оператором B і сталими коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі у відповідному функціональному просторі та доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

1 Постановка задачі

Нехай $\mathcal{S}$ — однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0,T] \times \mathcal{S}^p$, де $T > 0$, $p \geq 2$. Введемо $\mathbf{W}$ — лінійний простір кратних скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z) = \sum\limits_k P_k z^k = \sum\limits_{k_1} \ldots \sum\limits_{k_p} P_{k_1,\ldots,k_p} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$, де $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathcal{S}^p$, $P_k \in \mathbb{C}$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$.

Простір $\mathbf{W}'$ спряжений до простору $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів), які є формальними рядами Лорана $Q(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P \in \mathbf{W}$ за правилом $\langle Q, P \rangle = \sum\limits_k Q_k \overline{P}_k$.

Введемо шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, $\{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ наступним чином. Нехай $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi_k z^k$, де $z \in \mathcal{S}^p$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$, із заданим скалярним добутком $(\psi, \varphi)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k$, де $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, і нехай $\|\psi\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)} = (\psi, \psi)_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$; а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $u = u(t,z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^k$, $r = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$ визначає формула

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum_{r=0}^n \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S}^p)};$$

$\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)$ — простір вектор-функцій $v = v(z) = \mathrm{col}\,(v_1(z), \ldots, v_m(z))$, де $v_j = v_j(z) \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$, $j = 1, \ldots, m$, квадрат норми яких задається формулою $\|v\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)} = \sum\limits_{j=1}^m \|v_j\|^2_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)}$, а $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ — простір функцій $u = u(t,z) = \mathrm{col}\,(u_1(t,z), \ldots, u_m(t,z))$, де $u_j = u_j(t,z) \in \mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)$, $j = 1, \ldots, m$, з квадратом норми $\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum\limits_{j=1}^m \|u_j\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D}^p)}$.

Розглянемо систему рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+|s|\leq n} A_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

де $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $A_{s_0,s}$ — квадратні матриці порядку m, $A_{n,0,\ldots,0} = I_m$ — одинична матриця; $u = u(t,z) = \mathrm{col}\,(u_1(t,z), \ldots, u_m(t,z))$ — вектор розміру m, де $n, m \geq 1$. Оператор $B = (B_1, \ldots, B_p)$ складено з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, зокрема $B_j(z^k) = k_j z^k$. Степенями цих операторів є $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$, $j = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, n$. У формулі (1) позначено $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$.

Введемо також функцію $\zeta(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{-z}$, яка існує у півплощині Re $z>p$, та позначимо $\mathcal{O}_R$ — круг радіуса R з центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$.

Шукаємо розв'язок $u\in\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ системи (1), що задовольняє нелокальні умови

$$\mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0}-\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T}=\varphi_j,\qquad j=0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\varphi_j=\varphi_j(z)=\mathrm{col}\,(\varphi_{j1}(z),\ldots,\varphi_{jm}(z))$ — задані вектор-функції розміру m зі шкали просторів $\{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$.

Означення. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти таку вектор-функцію* $u=u(t,z)=\mathrm{col}\,(u_1(t,z),\ldots,u_m(t,z))$, *складену з функцій* $u_i(t,z)$, $i=1,\ldots,m$, *із значеннями* $u_i(t,\cdot)$ *у просторі* $\mathbf{W}'$ *для* $t\in[0,T]$, *яка задовольняє рівняння* (1), *умови* (2) *та належить до простору* $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$.

2 Побудова формального розв'язку. Теорема єдиності

Введемо псевдодиференціальні оператори. Для цього розглянемо довільну послідовність комплексних чисел $F(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Вона породжує псевдодиференціальний оператор $F(B)=F(B_1,\ldots,B_p)=F\Big(z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1},\ldots,z_p\dfrac{\partial}{\partial z_p}\Big)$, що діє на $\varphi(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi(k)z^k$ за формулою

$$F(B)\varphi(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\psi(k)z^k.$$

Коефіцієнти $\psi(k)$ розвинення $\varphi(z)$ у ряд Фур'є породжують оператор $\psi(B)$, а тому кожній функції з $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}^p)$ відповідає псевдодиференціальний оператор $\psi(B)$. При цьому $\varphi(z)=\psi(B)\delta(z)$, де $\delta(z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}z^k$. Аналогічно, послідовність функцій $F(t,k)$, $t\in[0,T]$, породжує оператор $F(t,B)$, функція $v(t,z)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}V(t,k)z^k$ з простору $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ — оператор-функцію $V(t,B)$. При цьому $v(t,z)=V(t,B)\delta(z)$.

Задача (1), (2) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial t}=L(B)v(t,z),\qquad \mu\, v(0,z)-v(T,z)=\varphi(z), \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
&v(t,z)=\mathrm{col}\,\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t},\ldots,\frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}\Big)=\mathrm{col}\,(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}),\\
&L(B)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{(n-1)m}\\ \hline -L_n(B) & -L_{n-1}(B)\ \ldots\ -L_1(B)\end{array}\right),\\
&L_r(B)=\sum_{|s|\le r}A_{n-r,s}B^s,\qquad L_r(B)=(L_r^{ij}(B))_{i,j=1,\ldots,m},\qquad r=1,\ldots,n,\\
&\varphi(z)=\mathrm{col}\,\big(\varphi_0(z),\varphi_1(z),\ldots,\varphi_{n-1}(z)\big).
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
&v(t,z)\equiv V(t,B)\delta(z)\equiv\mathrm{col}\,\big(V_0(B),V_1(B),\ldots,V_{n-1}(B)\big)\delta(z),\\
&\varphi(z)\equiv\psi(B)\delta(z)\equiv\mathrm{col}\,\big(\psi_0(B),\psi_1(B),\ldots,\psi_{n-1}(B)\big)\delta(z),
\end{aligned}$$

то задача (3) еквівалентна множині нелокальних крайових задач на проміжку $[0, T]$ для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dV(t,k)}{dt} = L(k)V(t,k), \qquad \mu V(0,k) - V(T,k) = \psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{4}$$

Нехай $Z = \operatorname{diag}(\tilde{k}^n I_m, \ldots, \tilde{k}^2 I_m, \tilde{k} I_m)$, $ZV(t,k) = \tilde{V}(t,k)$ і $Z\psi(k) = \tilde{\psi}(k)$. Тоді задачу (4) запишемо наступним чином

$$\frac{d\tilde{V}(t,k)}{dt} = \tilde{k}\tilde{L}(k)\tilde{V}(t,k), \qquad \mu\tilde{V}(0,k) - \tilde{V}(T,k) = \tilde{\psi}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{5}$$

де

$$\tilde{L}(k) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{(n-1)m} \\ \hline -\tilde{L}_n(k) & -\tilde{L}_{n-1}(k) \ \ldots \ -\tilde{L}_1(k) \end{array} \right), \qquad \tilde{L}_j(k) = \tilde{k}^{-j} L_j(k) = \sum_{|s| \le j} A_{n-j,s} \left(\frac{k}{\tilde{k}}\right)^s \tilde{k}^{|s|-j}.$$

Якщо числа $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, nm$, є коренями характеристичного рівняння

$$f(\lambda, k) = \det\big(\lambda I_{nm} - \tilde{L}(k)\big) = \det\big(\lambda^{mn} I_{nm} + \sum_{j=1}^{mn} \lambda^{mn-j} \tilde{L}_j(k)\big) = 0,$$

то $\gamma_j(k) = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями рівняння $\det\big(\gamma I_{nm} - L(k)\big) = 0$.

Визначник $f(\lambda, k)$ можемо записати у вигляді

$$f(\lambda, k) = \sum_{j=0}^{mn} f_j(k) \lambda^{mn-j} = \lambda^{mn} + \ldots + (-1)^{mn} \det \tilde{L}(k) = 0.$$

З оцінки Коші [12] для коренів многочлена $|\lambda_j(k)| \le 1 + \max\{|f_1(k)|, \ldots, |f_{mn}(k)|\}$ випливає, що вони є рівномірно обмеженими за k разом із коефіцієнтами $f_1(k), \ldots, f_{mn}(k)$ многочлена $f(\lambda, k)$. Загальний розв'язок рівняння (5) запишемо у вигляді

$$\tilde{V}(t,k) = e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)t} C(k), \tag{6}$$

де $C(k)$ — довільний вектор зі сталих. Для знаходження $C(k)$ підставимо $\tilde{V}(t,k)$ в крайові умови задачі (5) і отримаємо систему $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})C(k) = \tilde{\psi}(k)$. Якщо матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ невироджена, то невідомі $C(k)$ знаходимо за формулою $C(k) = (\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})^{-1}\tilde{\psi}(k)$. Тоді розв'язок задачі (5) матиме вигляд

$$\tilde{V}(t,k) = e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)t} (\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})^{-1} \tilde{\psi}(k). \tag{7}$$

Оскільки визначник матриці дорівнює добутку її власних значень, а власними значеннями матриці $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ є числа $\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$, то

$$\det(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T}) = \prod_{j=1}^{nm} (\mu - e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}). \tag{8}$$

Сформулюємо і доведемо теорему єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння*

$$\det\Big(\frac{\ln\mu - 2\pi m_1 i}{\tilde{k}T} I_{nm} - \tilde{L}(k)\Big) = 0, \tag{9}$$

не мало розв'язків у цілих числах m_1 *і* $k_1, \ldots, k_p$.

Доведення. Необхідність. Нехай розв'язок задачі (1), (2) єдиний. Тоді задача (5) має єдиний розв'язок для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, що зображається у вигляді (7). Отже, матриця $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})$ є невиродженою. Таким чином, враховуючи (8), $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_j(k)T}$. Логарифмуючи, отримаємо, що рівняння (9) не має розв'язків у цілих числах m_1 і $k_1, \ldots, k_p$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай числа m_1^* і $k_1^*, \ldots, k_p^*$ є розв'язком рівняння (9). Тоді, вважаючи $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln \mu - i2\pi m_1^*}{\tilde{k^*} T}$, де $k^* = (k_1^*, \ldots, k_p^*)$, однорідна задача (5) має безліч розв'язків $\tilde{V}(t, k^*)$, що утворюють підпростір та визначаються (6), у якій вектор $C(k)$ є загальним розв'язком виродженої однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь $(\mu I_{nm} - e^{\tilde{k}\tilde{L}(k)T})C(k) = 0$. Отже, розв'язок задачі (1), (2) не є єдиним. □

3 Оцінювання розв'язку. Теорема існування

Для встановлення умов існування та побудови розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$ припустимо, що корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{mn}(k)$ є різними для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p$. Позначимо $R(k) = \big(\tilde{\psi}(k), \tilde{L}(k)\tilde{\psi}(k), \ldots, \tilde{L}^{nm-1}(k)\tilde{\psi}(k)\big)$, $\rho(t,k) = \mathrm{col}\,\big(\rho(t,\lambda_1), \ldots, \rho(t,\lambda_{nm})\big)$,

$$W(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{nm} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_{nm}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_{nm}^{n-1} \end{pmatrix},$$

де $W(k)$ — матриця Вандермонда, побудована за коренями $\lambda_1, \ldots, \lambda_{nm}$, а $\rho(t,k)$ — вектор значень функцій $\rho(t,\lambda) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda T}}$ на коренях $\lambda_1, \ldots, \lambda_{nm}$.

Тоді розв'язок (7) задачі (5) записується у вигляді [11]

$$\tilde{V}(t,k) = R(k) W^{-T}(k) \rho(t,\lambda),$$

де $W^{-T}(k) = \big(W^{-1}(k)\big)^T = \big(W^T(k)\big)^{-1}$ — матриця обернена до транспонованої матриці Вандермонда. Для обчислення матриці $W^{-T}(k)$ використовуємо формулу

$$W^{-T}(k) = \big(f_{mn+1-i-j}(k)\big)_{i,j=1}^{mn} W(k) \big(\mathrm{diag}\big(f'(\lambda_j(k),k)\big)_{j=1}^{mn}\big)^{-1},$$

де $f_j(k) = 0$ при $j < 0$, $f'(\lambda,k) = \dfrac{\partial f(\lambda,k)}{\partial \lambda}$. Перетворимо вирази $\big(f'(\lambda_j(k),k)\big)^{-2}$ до дробів [9] $\dfrac{1}{\mathrm{Res}\,(f,f')} \prod\limits_{\substack{1 \le \alpha < \beta \le mn \\ \alpha,\beta \neq j}} (\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k))^2$, де $\mathrm{Res}\,(f,f') = \prod\limits_{j=1}^{mn} f'(\lambda_j(k),k)$ — результант многочленів f та f' і $\mathrm{Res}\,(f,f') = \det S(f)$, де $S(f)$ — матриця Сильвестра многочлена $f = f(\lambda,k)$, яка є блочною матрицею і складається з двох матриць з $mn-1$ і mn рядками відповідно,

$$S(f) = \begin{pmatrix} \big(f_{j-i}(k)\big)_{i,j=1}^{mn-1,\,2mn-1} \\ \big((mn-j+i) f_{j-i}(k)\big)_{i,j=1}^{mn,\,2mn-1} \end{pmatrix}.$$

Встановимо умови існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$. Оскільки

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = -L_n(B)u - L_{n-1}(B)\frac{\partial u}{\partial t} - \ldots - L_1(B)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}},$$

то
$$\left\|\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right\|_{\bar{\mathbf{H}}_{q-n}(\mathcal{S}^p)} \leq C_1\Big(\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_{q-1}(\mathcal{S}^p)} + \ldots + \left\|\frac{\partial^{q-n+1} u}{\partial t^{n-1}}\right\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_1(\mathcal{S}^p)}\Big),$$
де $C_1 = C_1(n,p,A)$ — деяка стала. Отже,
$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)} &\leq (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{\bar{\mathbf{H}}_{q-j}(\mathcal{S}^p)} = (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\max_{[0,T]}\|v_j\|_{\bar{\mathbf{H}}_{q-j}(\mathcal{S}^p)} \\ &= (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{[0,T]}|\tilde{k}^{q-j}V_j(t,k)|^2 = (C_1+1)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{[0,T]}|\tilde{k}^{q-n}\tilde{V}_j(t,k)|^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Запишемо наступну оцінку
$$\begin{aligned}|\tilde{k}^{q-n}\tilde{V}_j(t,k)|^2 &\leq C_2\|\rho(t,k)\|^2\|W^{-T}(k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{q-n}\tilde{\psi}_j(t,k)|^2 \\ &= C_2\|\rho(t,k)\|^2\|W^{-T}(k)\|^2\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}^{q-j}\psi_j(t,k)|^2.\end{aligned} \tag{11}$$

Сформулюємо та доведемо теорему існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *та для деяких додатних сталих* C_3 *та* C_4 *і дійсних чисел* η_1, η_2 *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*
$$|\det S(f)| \geq C_3\tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{12}$$
$$\big|\rho\big(t,\lambda_l(k)\big)\big| \leq C_4\tilde{k}^{\eta_2}, \qquad l = 1,\ldots,mn. \tag{13}$$
Якщо $\varphi_j \in \bar{\mathbf{H}}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)$, *де* $\psi > q+\eta_1+\eta_2$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Доведення. Враховуючи оцінки (11)–(13), нерівність (10) запишемо у вигляді
$$\|u\|^2_{\bar{\mathbf{H}}^n_q(\mathcal{D}^p)} \leq C\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{\bar{\mathbf{H}}_{\psi-j}(\mathcal{S}^p)},$$
де $C>0$ — стала, звідки й випливає твердження теореми. □

Розглянемо умови, за яких виконується нерівність (12). Для отримання оцінок сформулюємо та доведемо наступну лему.

Лема 3.1. *Якщо* $f(\lambda) = h(\lambda) + ag(\lambda)$, *де* $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $g(\lambda)$ *— многочлени, а саме* $f(\lambda) = f_0\lambda^t + f_1\lambda^{t-1} + \ldots + f_t$, $h(\lambda) = h_0\lambda^t + h_1\lambda^{t-1} + \ldots + h_t$, $g(\lambda) = g_0\lambda^s + g_1\lambda^{s-1} + \ldots + g_s$, *де* $s < t$, *а* $S(f)$, $S(h)$, $S(g)$ *— матриці Сильвестра цих многочленів, то визначник* $\det S(f)$ *матриці* $S(f)$ *є многочленом за змінною* a *степеня не вище* $t+s-1$, *причому*
$$\det S(f) = \big((s-t)h_0g_0\big)^{t-s}\det S(g)a^{t+s-1} + \ldots + \det S(h).$$

Доведення. За умовою $f_i = h_i + ag_{s-t+i}$ для $i \in \{t-s, t-s+1, \ldots, t\}$ і $f_i = h_i$ для $i \in \{0, 1, \ldots, t-s-1\}$. Оскільки матриця Сильвестра $S(f)$ многочлена $f(\lambda)$ є блочною

$$S(f) = \begin{pmatrix} \left(f_{j-i}\right)_{t-1}^{2t-1} \\ \left((\omega+t-s)f_{j-i}\right)_{t}^{2t-1} \end{pmatrix},$$

де i — номер рядка, j — номер стовпця, $(\ )_r^q$ — матриця порядку $r\times q$, $\omega{=}s-j+i$, то

$$S(f) = \begin{pmatrix} \left(h_{j-i}\right)_{t-1}^{2t-1} \\ \left((\omega+t-s)h_{j-i}\right)_{t}^{2t-1} \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} (0)_{t-1}^{t-s} & \left(g_{j-i}\right)_{t-1}^{t+s-1} \\ (0)_{t}^{t-s} & \left(\omega g_{j-i}\right)_{t}^{t+s-1} \end{pmatrix},$$

де $h_j = 0$ для $j < 0$ та $j > t$ і $g_j = 0$ для $j < 0$ та $j > s$. Тоді

$$S(f) = \begin{pmatrix} \left(h_{j-i}\right)_{t-1}^{2t-1} & \left(g_{j-i}\right)_{t-1}^{t+s-1} \\ \left((\omega+t-s)h_{j-i}\right)_{t}^{2t-1} & \left(\omega g_{j-i}\right)_{t}^{t+s-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{t-s} & 0 \\ 0 & E_{t+s-1} \\ 0 & aE_{t+s-1} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу Біне-Коші, отримаємо многочлен за змінною a, тобто

$$\det S(f) = a^{t+s-1}\det\begin{pmatrix} \left(h_{j-i}\right)_{t-1}^{t-s} & \left(g_{j-i}\right)_{t-1}^{t+s-1} \\ \left((\omega+t-s)h_{j-i}\right)_{t}^{t-s} & \left(\omega g_{j-i}\right)_{t}^{t+s-1} \end{pmatrix} + \ldots + \det S(h).$$

Коефіцієнт біля a^{t+s-1} запишемо у вигляді

$$\det\begin{pmatrix} S_3 & S_4 & \mathcal{X}_2 \\ 0 & 0 & \left(g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \\ S_1 & S_2 & \mathcal{X}_1 \\ 0 & 0 & \left(\omega g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix} = (-1)^{t-s}\det\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \mathcal{X}_1 \\ S_3 & S_4 & \mathcal{X}_2 \\ 0 & 0 & \left(g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \\ 0 & 0 & \left(\omega g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \left(g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \\ \left(\omega g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \end{pmatrix},$$

де матриці $S_1 = (\omega+t-s)h_{j-i}$, $S_3 = h_{j-i}$, $S_2 = \omega g_{j-i}$, $S_4 = g_{j-i}$ мають порядок $t-s$, $\mathcal{X}_1$ та $\mathcal{X}_2$ позначають матриці, від яких не залежать відповідні визначники. Підставивши разом із формулою $\det\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} = \left(det\begin{pmatrix} th_0 & sg_0 \\ h_0 & g_0 \end{pmatrix}\right)^{t-s} = \Big(h_0g_0(t-s)\Big)^{t-s}$ у попередню, отримуємо

$$\det S(f) = (-1)^{t-s}\big((t-s)h_0g_0\big)^{t-s}a^{t+s-1}\det\begin{pmatrix} \left(g_{j-i}\right)_{s-1}^{2s-1} \\ \left(\omega g_{j-i}\right)_{s}^{2s-1} \end{pmatrix} + \ldots + \det S(h)$$
$$= \big((s-t)h_0g_0\big)^{t-s}a^{t+s-1}\det S(g) + \ldots + \det S(h).$$

□

Лема 3.2 ([6]). *Нехай многочлен $g(\lambda)$ має вигляд $g(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} g_j\lambda^{n-j}$, тоді*

$$\det S(g) = \sum_{\alpha=0}^{n-1}(-1)^{\alpha+n\alpha}\alpha^{\alpha}(n-\alpha)^{n-\alpha}g_0^{\alpha}g_n^{n-\alpha-1}g_\alpha^n + \ldots,$$

де три крапки означають доданки, що не містять n-тих степенів коефіцієнтів g_α.

Позначимо через $b_1, \dots, b_p$ коефіцієнти біля похідних $B_1^n, \dots, B_p^n$ оператора $\tilde{L}_n^{11}(B)$, через $b_{p+1}, \dots, b_{2p}$ — відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{L}_n^{22}(B)$ і т.д., через $b_{(m-1)p+1}, \dots, b_{mp}$ — відповідні коефіцієнти оператора $\tilde{L}_n^{mm}(B)$. Нехай $b = (b_1, b_2, \dots, b_{mp})$.

Многочлен $f(\lambda, k)$ можемо записати у вигляді

$$f(\lambda,k) = b_j\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n g_1(\lambda,k) + h_1(\lambda,k), \ \ j = 1,\dots,p,$$

де многочлени $g_1(\lambda,k)$ та $h_1(\lambda,k)$ не залежать від b_j. Многочлен $g_1(\lambda,k)$ також можна розписати у вигляді суми $g_1(\lambda,k) = b_{p+j}\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n g_2(\lambda,k) + h_2(\lambda,k)$, $j = 1,\dots,p$, де многочлени $g_2(\lambda,k)$ та $h_2(\lambda,k)$ не залежать від b_{p+j}. Кожен многочлен $g_i(\lambda,k)$ для $i = 1,\dots,m-2$ можемо записати як $g_i(\lambda,k) = b_{ip+j}\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n g_{i+1}(\lambda,k) + h_{i+1}(\lambda,k)$, $j = 1,\dots,p$, де $g_{i+1}(\lambda,k)$ та $h_{i+1}(\lambda,k)$ не залежать від b_{ip+j}. Застосувавши для кожного з многочленів $f(\lambda,k)$ і $g_i(\lambda,k)$, $i = 1,\dots,m-2$, лему 3.1 при $a = b_j\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n$ у розкладі многочлена $f(\lambda,k)$ і $a = b_{ip+j}\Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^n$ у розкладі многочленів $g_i(\lambda,k)$ та при $g_{l0} = h_{l0} = 1$, де g_{l0} і h_{l0}, $l = 1,\dots,m-1$, коефіцієнти найстарших членів многочленів $g_l(\lambda,k)$ і $h_l(\lambda,k)$ відповідно, отримуємо

$$\det S\big(f(\lambda,k)\big) = (-1)^n n^n \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n(2mn-n-1)} (b_j)^{2mn-n-1} \det S(g_1) + \dots, \tag{14}$$

$$\det S\big(g_i(\lambda,k)\big) = (-1)^n n^n \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n(2mn-(2i+1)n-1)} (b_{ip+j})^{2mn-(2i+1)n-1} \det S(g_{i+1}) + \dots, \tag{15}$$

де три крапки означають доданки зі степенями b_{ip+j}^{α}, $0 \le \alpha \le 2mn - (2i+1)n - 2$.

Для знаходження $\det S\big(g_{m-1}(\lambda,k)\big)$ використаємо лему 3.2 при $\alpha = 0$ і $g_{m-1,0} = 1$

$$\det S\big(g_{m-1}(\lambda,k)\big) = n^n b_{(m-1)p+j}^{n-1} \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)} + \dots, \quad j = 1,\dots,p, \tag{16}$$

де три крапки означають доданки зі степенями $b_{(m-1)p+j}^{\alpha}$, $0 \le \alpha \le n-2$.

Теорема 3. *Нехай* $0 < \delta < 1$, $r > p$, *коефіцієнти системи* (1) *фіксовані (за винятком коефіцієнтів* $b_1, \dots, b_{mp}$*). Тоді існує така множина* $W_\delta \subset \mathcal{O}_R^{mp}$, *що* $\operatorname{meas} W_\delta \le \delta$ *і для всіх векторів* $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta$ *та для всіх* $k \ne 0$ *при* $\eta_1 > m(mn-1)r/2$ *справджується оцінка*

$$|\det S\big(f(\lambda,k)\big)| \ge \delta^{m(mn-1)/2} C_5 \tilde{k}^{-\eta_1}, \tag{17}$$

де $C_5 = n^{mn}\big(m\zeta(r)(p+1)^n \pi^{mp} R^{2mp-2}\big)^{-m(mn-1)/2}$.

Доведення. Використовуючи рівності (15) і (16), формулу (14) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\det S\big(f(\lambda,k)\big) &= (-1)^{n(m-1)} n^{mn} \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{n\big((2mn-n-1)+(2mn-3n-1)+\dots+(3n-1)+(n-1)\big)} \\ &\quad \times (b_j)^{2mn-n-1} (b_{p+j})^{2mn-3n-1} \dots (b_{(m-2)p+j})^{3n-1} (b_{(m-1)p+j})^{n-1} + \dots \\ &= (-1)^{n(m-1)} n^{mn} \Big(\frac{k_j}{\tilde{k}}\Big)^{mn(mn-1)} B_j(k) B_{p+j}(k) \dots B_{(m-1)p+j}(k),\end{aligned}$$

де $B_{ip+j}(k)$, $i = 0,1,\dots,m-1$, — унітарний многочлен степеня $2(m-i)n - n - 1$ змінної b_{ip+j}, коефіцієнти якого не залежать від $b_1, \dots, b_{ip+j-p}$, $j = 1,\dots,p$. Знайдемо модуль визначника матриці Сильвестра $S\big(f(\lambda,k)\big)$ многочлена $f(\lambda,k)$

$$|\det S(f(\lambda,k))| = n^{mn}\Big(\frac{|k_j|}{\tilde{k}}\Big)^{mn(mn-1)}|B_j(k)||B_{p+j}(k)|\dots|B_{(m-1)p+j}(k)|. \tag{18}$$

У рівності (18) однозначно виберемо індекс $j = j(k)$ так, щоб $k_j = \max\{k_1,\dots,k_p\}$.

Нехай $W_\delta^{m-1}(k)$ — множина тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{(m-1)p+j}(k)| < \Big(\frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(n-1)/2}, \ \ j = 1,\dots,p. \tag{19}$$

Оцінимо міру цієї множини. Позначимо через $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k) \subset \mathcal{O}_R^p$ множину тих векторів $b_{(m-1)p+1},\dots,b_{mp}$, а через $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j})$ — множину тих значень змінної $b_{(m-1)p+j}$ для фіксованого $\tilde{b}_{(m-1)p+j}$, де $\tilde{b}_{(m-1)p+j}$ — вектор з компонентами $b_{(m-1)p+1},\dots,b_{mp}$ без компоненти $b_{(m-1)p+j}$, для яких виконується нерівність (19). Оскільки множина $W_\delta^{m-1}(k)$ є декартовим добутком $\mathcal{O}_R^{(m-1)p} \times \tilde{W}_\delta^{m-1}(k)$, то її міра знаходиться за формулою

$$\operatorname{meas} W_\delta^{m-1}(k) = (\pi R^2)^{(m-1)p}\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k),$$

де

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k) = \int\limits_{\mathcal{O}_R^{p-1}} \operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j})\, d\tilde{b}_{(m-1)p+j}.$$

За лемою Картана для міри множини $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j})$ справджується оцінка

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k,\tilde{b}_{(m-1)p+j}) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Після інтегрування по області $\mathcal{O}_R^{p-1}$ отримаємо, що

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-1}(k) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{(m-1)p}}.$$

Тоді для міри множини $W_\delta^{m-1}(k)$ справедлива оцінка $\operatorname{meas} W_\delta^{m-1}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)}$.

Нехай $W_\delta^{m-2}(k)$ — множина тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{(m-2)p+j}(k)| < \Big(\frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(3n-1)/2}, \quad j = 1,\dots,p. \tag{20}$$

Оцінимо міру цієї множини. Позначимо через $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k) \subset \mathcal{O}_R^{2p}$ множину тих векторів $b_{(m-2)p+1},\dots,b_{mp}$, а через $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k,\tilde{b}_{(m-2)p+j})$ — множину тих значень змінної $b_{(m-2)p+j}$ для фіксованого $\tilde{b}_{(m-2)p+j}$ з останніми p компонентами з $\tilde{W}_\delta^{m-1}(k)$, де $\tilde{b}_{(m-2)p+j}$ — вектор з компонентами $b_{(m-2)p+1},\dots,b_{mp}$ без компоненти $b_{(m-2)p+j}$, для яких виконується (20). Оскільки $W_\delta^{m-2}(k) = \mathcal{O}_R^{(m-2)p} \times \tilde{W}_\delta^{m-2}(k)$, то $\operatorname{meas} W_\delta^{m-2}(k) = (\pi R^2)^{(m-2)p}\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-2}(k)$. Для міри множини $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k,\tilde{b}_{(m-2)p+j})$ за лемою Картана справджується оцінка

$$\operatorname{meas}\tilde{W}_\delta^{m-2}(k,\tilde{b}_{(m-2)p+j}) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Зінтегрувавши по області $\mathcal{O}_R^{2p-1} \times \big(\mathcal{O}_R^p \setminus \tilde{W}_\delta^{m-1}(k)\big)$, отримаємо оцінку для міри множини $\tilde{W}_\delta^{m-2}(k)$: $\operatorname{meas} \tilde{W}_\delta^{m-2}(k) \le \dfrac{\delta \tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{(m-2)p}}$. Тоді для міри множини $W_\delta^{m-2}(k)$ виконується оцінка: $\operatorname{meas} W_\delta^{m-2}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)}$. Аналогічно, позначимо через $W_\delta^i(k)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, множину тих векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp}$, для яких при фіксованому k виконується оцінка

$$|B_{ip+j}(k)| < \Big(\frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{(2mn-(2i+1)n-1)/2}, \ \ j = 1, \dots, p. \tag{21}$$

Знайдемо оцінки мір множин $W_\delta^i(k)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Нехай $\tilde{W}_\delta^i(k) \subset \mathcal{O}_R^{(m-i)p}$ — множина тих векторів $b_{ip+1}, \dots, b_{mp}$, а $\tilde{W}_\delta^i(k, \tilde{b}_{ip+j})$ — множина тих значень змінної b_{ip+j} для фіксованого $\tilde{b}_{ip+j}$ з останніми $(m-i-1)p$ компонентами з множини $\tilde{W}_\delta^{i+1}(k)$, де $\tilde{b}_{ip+j}$ — вектор з компонентами $b_{ip+1}, \dots, b_{mp}$ без компоненти b_{ip+j}, для яких виконується нерівність (21). Оскільки $W_\delta^i(k) = \mathcal{O}_R^{ip} \times \tilde{W}_\delta^i(k)$, то $\operatorname{meas} W_\delta^i(k) = (\pi R^2)^{ip} \operatorname{meas} \tilde{W}_\delta^i(k)$. Для міри множини $\tilde{W}_\delta^i(k, \tilde{b}_{ip+j})$ за лемою Картана справджується оцінка

$$\operatorname{meas} \tilde{W}_\delta^i(k, \tilde{b}_{ip+j}) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{mp-1}}.$$

Інтегруючи по області $\mathcal{O}_R^{ip-1} \times \big(\mathcal{O}_R^{(m-i-1)p} \setminus \tilde{W}_\delta^{i+1}(k)\big)$, отримуємо оцінку

$$\operatorname{meas} \tilde{W}_\delta^i(k) \le \frac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)(\pi R^2)^{ip}}.$$

Таким чином, для міри множини $W_\delta^i(k)$ маємо нерівність $\operatorname{meas} W_\delta^{m-2}(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{m\zeta(r)}$.

На множині $\mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta(k)$, де $W_\delta(k) = \bigcup\limits_{i=0}^{m-1} W_\delta^i(k)$, а $\operatorname{meas} W_\delta(k) \le \sum\limits_{i=0}^{m-1} \operatorname{meas} W_\delta^i(k) \le \dfrac{\delta\tilde{k}^{-r}}{\zeta(r)}$, з рівності (18) та нерівностей (19)–(21) випливає нерівність

$$\Big|\det S\big(f(\lambda, k)\big)\Big| \ge n^{mn}\Big(\frac{\delta}{m\zeta(r)(p+1)^n\pi^{mp}R^{2mp-2}}\Big)^{m(mn-1)/2}\tilde{k}^{-m(mn-1)r/2} =$$
$$= \delta^{m(mn-1)/2}C_5\tilde{k}^{-\eta_1}$$

для фіксованого вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. Отже, поза множиною $W_\delta = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} W_\delta(k)$ міри $\operatorname{meas} W_\delta \le \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \operatorname{meas} W_\delta(k) = \delta$ нерівність (17) виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$. □

Розглянемо умови виконання нерівностей (13). Послідовність знаменників функції $\rho(t, \lambda_l(k))$ може мати збіжні до нуля підпослідовності. Для оцінювання $\rho(t, \lambda_l(k))$ побудуємо виняткові множини малої міри на комплексній площині для $\mu \in \mathcal{O}_M$, використання яких є варіантом метричного підходу до оцінювання малих знаменників [4, 10].

Виберемо додатні числа η_2 та χ з умов $\eta_2 > \dfrac{p}{2}$, $\chi^2 32nT^2\zeta(2\eta_2) = \pi$. Нехай $\varepsilon<1$ і, додатково, $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$, якщо $n = 1$; тоді для $n > 1$ виконується наступна нерівність $\ln 2/(2\chi T) = \ln 2\sqrt{8n\zeta(2\eta_2)/\pi} \ge \sqrt{8n/\pi}/2 = \sqrt{2n/\pi} > 1$, тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\chi T)$.

Позначимо $\chi_1 = \chi_1(k) = \sqrt{\varepsilon}\chi\tilde{k}^{-\eta_2}$ та $\mu_l(k) = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$, $\mu(k) = e^{\tilde{k}\lambda T}$. Враховуючи ці позначення, отримаємо, що $\rho(t, \lambda) = \dfrac{e^{\tilde{k}\lambda t}}{\mu - \mu(k)}$.

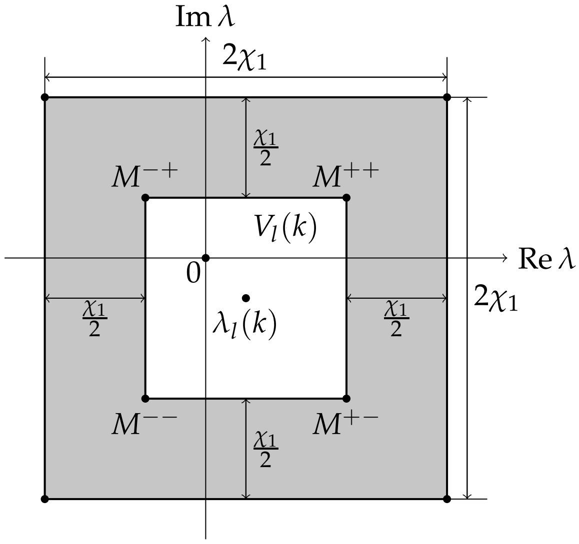

Рис. 1. Концентричні квадрати з центром у точці $\lambda_l(k)$: квадрат $V_l(k)$ зі стороною χ_1 та квадрат із стороною $2\chi_1$. Виділено множину, яка є різницею цих квадратів.

Виберемо множини $V_l(k)$ для тих $l = 1,\dots,n$ та $k \in \mathbb{Z}^p$, що задовольняють умову $|\mu_l(k)| < 2M$, за формулою

$$V_l(k) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_l(k))| < \frac{\chi_1}{2},\ |\mathrm{Im}\,(\lambda - \lambda_l(k))| < \frac{\chi_1}{2}\right\}.$$

Кожна множина $V_l(k)$ — це квадрат (рис. 1) зі стороною χ_1, центром $\lambda_l(k)$ і вершинами M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} у комплексній площині змінної λ. Точки M^{--}, M^{-+}, M^{++}, M^{+-} зображають комплексні числа $\lambda_l(k) - (1+i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) - (1-i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) + (1+i)\chi_1/2$, $\lambda_l(k) + (1-i)\chi_1/2$ відповідно.

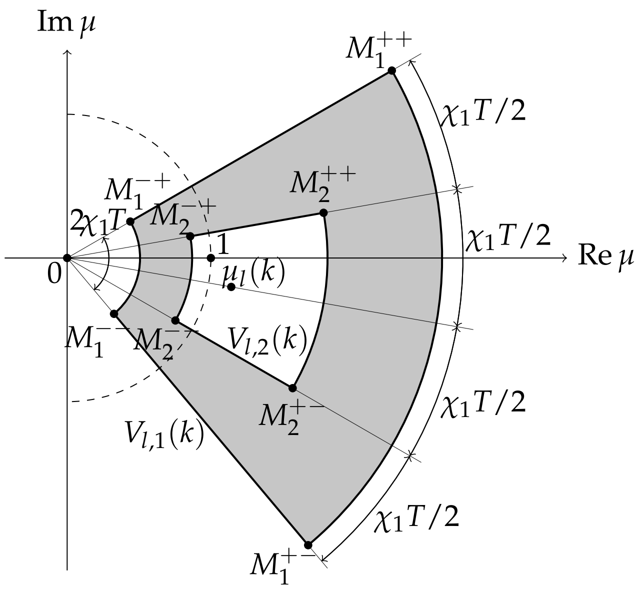

Рис. 2. Образи квадратів з рис. 1 при відображенні $\lambda \to e^{\tilde{k}\lambda T}$.

Нехай множина $V_{l,2}(k)=\left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T/2}\le\left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 T/2}, \left|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le\chi_1 T/2\right\}$ — образ квадрата $V_l(k)$ при відображенні $\lambda\to e^{\tilde{k}\lambda T}$, а множина $V_{l,1}(k)$ є образом концентричного до $V_l(k)$ квадрата зі стороною $2\chi_1$, тобто її можна задати за допомогою формули $V_{l,1}(k) = \left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 T}\le\left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 T}, \left|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le\chi_1 T\right\}$. Тоді

$$V_{l,r}(k) = \left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 2^{1-r}T}\le\left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 2^{1-r}T}, \left|\arg\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le\chi_1 2^{1-r}T\right\}.$$

Множина $V_{l,r}(k)$ є частиною кільця $\left\{\mu\in\mathbb{C} : e^{-\chi_1 2^{1-r}T}\le\left|\frac{\mu}{\mu_l(k)}\right|\le e^{\chi_1 2^{1-r}T}\right\}$, яку видно з початку координат під кутом $\chi_1 2^{1-r}T$ (рис. 2). Площа (міра) множини $V_{l,1}(k)$, яку назвемо винятковою множиною для заданого k, обчислюється за формулою

$$\operatorname{meas} V_{l,1}(k) = \frac{2\chi_1 T}{2\pi}\left(\pi|\mu_l(k)|^2 e^{2\chi_1 T} - \pi|\mu_l(k)|^2 e^{-2\chi_1 T}\right) = \chi_1 T|\mu_l(k)|^2\left(e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}\right).$$

Оскільки $e^{2\chi_1 T} < 2$ і $\dfrac{e^{y_2\chi_1 T} - e^{y_1\chi_1 T}}{y_2 - y_1} = \chi_1 T e^{y_3\chi_1 T}\le\chi_1 T e^{y_2\chi_1 T}$, де $y_3\in(y_1, y_2)$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} V_{l,1}(k) &= 4\chi_1 T|\mu_l(k)|^2\frac{e^{2\chi_1 T} - e^{-2\chi_1 T}}{4}\\ &\le 4\big(\chi_1 T|\mu_l(k)|\big)^2 e^{2\chi_1 T}\le 4(2\chi_1 TM)^2 e^{2\chi_1 T} < 32(\chi_1 TM)^2.\end{aligned}$$

Об'єднаємо виняткові множини $V_{l,1}(k)$ в одну виняткову множину

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p;\\ |\mu_l(k)|\le 2M}}\ \bigcup_{l=1}^{n} V_{l,1}(k)$$

і знайдемо оцінку її міри: $\operatorname{meas} V_\varepsilon = \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p;\\ |\mu_l(k)|\le 2M}}\sum\limits_{l=1}^{n}\operatorname{meas} V_{l,1}(k)\le 32(TM)^2\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\chi_1^2$. Враховуючи позначення χ_1 та χ, звідси отримуємо нерівність

$$\operatorname{meas} V_\varepsilon\le 32nT^2\zeta(2\eta_2)\chi^2\varepsilon M^2 = \varepsilon\pi M^2 = \varepsilon\operatorname{meas}\mathcal{O}_M. \tag{22}$$

Параметр μ вважатимемо елементом множини $\mathcal{O}_M\setminus V_\varepsilon$. Враховуючи формулу (22), для міри множини $\mathcal{O}_M\setminus V_\varepsilon$ запишемо оцінку $\operatorname{meas}(\mathcal{O}_M\setminus V_\varepsilon)\ge(1-\varepsilon)\operatorname{meas}\mathcal{O}_M$.

Лема 3.3 ([4]). *Якщо $\eta_2 > p/2$, то для всіх $\mu\in\mathcal{O}_M\setminus V_\varepsilon$ функція $\rho(\lambda, t)$ в області $V_l(k)\times[0, T]$ має оцінку зверху $|\rho(t,\lambda)|\le\dfrac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{k}^{\eta_2}$,* де $\theta = 8\max\{2, 1/|\mu|\}\sqrt{2\pi n\zeta(2\eta_2)}$.

Оскільки $\lambda_l(k)\in V_l(k)$ і $\left|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right| = |\rho(t,\lambda_l(k))|$, то оцінка (13) виконується для всіх $\mu\in\mathcal{O}_M\setminus V_\varepsilon$. Сформулюємо загальну теорему існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 1, $\mu\in\mathcal{O}_M\setminus V_\varepsilon$. *Тоді у разі* $\varphi_0\in\bar{\mathbf{H}}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1\in\bar{\mathbf{H}}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p), \ldots, \varphi_{n-1}\in\bar{\mathbf{H}}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$, де $\psi = q + \big(p + m(mn-1)r\big)/2$, $r > p$, *і для всіх векторів* $b\in\mathcal{O}_R^{mp}\setminus W_\delta$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) $u\in\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, *який неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Доведення. З теореми 1 випливає єдиність розв'язку задачі (1), (2). За теоремою 3 для всіх векторів $b \in \mathcal{O}_R^{mp} \setminus W_\delta$ виконується оцінка (12) для $\eta_1 > m(mn-1)(2n+r)/2$, де $r > p$. Згідно з лемою 3.3, для довільного $\mu \in \mathcal{O}_M \setminus V_\varepsilon$ виконується оцінка (13) для $\eta_2 > p/2$. Таким чином, з теореми 2 випливає як існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, так і його неперервна залежність від функцій $\varphi_0 \in \bar{\mathbf{H}}_\psi(\mathcal{S}^p)$, $\varphi_1 \in \bar{\mathbf{H}}_{\psi-1}(\mathcal{S}^p)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \bar{\mathbf{H}}_{\psi-n+1}(\mathcal{S}^p)$ для $\psi = q + \big(p + m(mn-1)r\big)/2$. □

Висновки

У роботі розглянуто нелокальну крайову задачу для системи диференціально-операторних рівнянь з оператором диференціювання $B=(B_1,\ldots,B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, який діє на функції комплексних змінних $(z_1,\ldots,z_p)$. Для встановлення розв'язності задачі введено шкали $\{\bar{\mathbf{H}}_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$ просторів вектор-функцій багатьох комплексних змінних. Розглядувана задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників для всіх (за винятком множини нульової або малої міри) векторів, складених з компонент коефіцієнтів $A_{s_0,s}$ системи та параметра μ. На основі цих теорем встановлено достатні умови існування розв'язку задачі у $\bar{\mathbf{H}}_q^n(\mathcal{D}^p)$, де q — довільне дійсне число. Знайдено необхідні та достатні умови єдиності розв'язку.

References

[1] Borok V.M., Fardigola L.V. *Nonlocal well-posed boundary-value problems in a layer.* Math. Notes 1990, **48** (1), 635–639. doi:10.1007/BF01164259 (translation of Mat. Zametki 1990 **48** (1), 20–25. (in Russian))

[2] Goy T.P., Ptashnyk B.I. *Problem with nonlocal conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations.* Ukrainian Math. J. 1997, **49** (2), 204–215. doi:10.1007/BF02486436 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1997, **49** (2), 186–195. (in Ukrainian))

[3] Zadorozhna N.M., Ptashnyk B.I. *Nonlocal boundary value problem for parabolic equations with variable coefficients.* Ukrainian Math. J. 1995, **47** (7), 1050–1057. doi:10.1007/BF01084900 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1995, **47** (7), 915–921. (in Ukrainian))

[4] Il'kiv V.S., Strap N.I. *Nonlocal boundary value problem for partial differential equations in multidimensional complex domain.* Sci. Bull. Uzhhorod Univ. Mathematics and informatics 2013, **24** (1), 60–72. (in Ukrainian)

[5] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V. *Problem with nonlocal two-point condition in time variable for homogeneous partial differential equation of infinite order in spatial variables.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2008, **51** (4), 17–26. (in Ukrainian)

[6] Maherovska T.V. *Investigation of smoothness for the solution of the Cauchy problem for systems of partial differential equations by the metric approach.* Sci. Bull. Chernivtsi Univ. Math. Series 2011, **1** (1-2), 84–93. (in Ukrainian)

[7] Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Prut, Chernivtsi, 2003. (in Ukrainian)

[8] Nakhushev A.M. Problems with a shift for partial differential equations. Nauka, Moscow, 2006. (in Russian)

[9] Prasolov V.V. Polynomials. MSCME, Moscow, 2001. (in Russian)

[10] Ptashnyk B.Yo. Incorrect boundary value problems for partial differential equations. Naukova Dumka, Kyiv, 1984. (in Russian)

[11] Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. Naukova Dumka, Kyiv, 2002. (in Ukrainian)

[12] Horne R. Johnson. Matrix analysis. Mir, Moscow, 1989. (in Russian)

[13] Eloe Paul W., Ahmad Bashir. *Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions*. Appl. Math. Lett. 2005, **18** (5), 521–527. doi:10.1016/j.aml.2004.05.009

[14] Karakostas G.L., Tsamatos P.Ch. *Existence results for some n-dimensional nonlocal boundary value problems*. J. Math. Anal. Appl. 2001, **259** (2), 429–438. doi:10.1006/jmaa.2000.7412

Надійшло 01.11.2013

Після переробки 27.01.2014

Il'kiv V.S., Strap N.I. *Non-local boundary value problem for a system of partial differential equations with operator coefficients in a complex domain*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 242–255.

The paper is devoted to investigation of non-local boundary problem for a system of partial differential equations with the operator $B = (B_1, \dots, B_p)$, where $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, are operators of the generalized differentiation, which operates on complex variable z_j. Problem is incorrect in the Hadamard sense and the solvability of this problem depends on the small denominators which arising in the construction of the solution. By using of metric approach, the theorem about lower estimation of small denominators was proved, and also existence and uniqueness conditions of this solution in the scale of spaces of many complex variables functions are establish.

Key words and phrases: partial differential equation, operator of generalized differentiation, pseudo-differential operator, small denominators, metric estimation.

Илькив В.С., Страп Н.И. *Нелокальная краевая задача для для системы дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в многомерной комплексной области* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 242–255.

Исследовано нелокальную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с частными производными с векторным оператором $B = (B_1, \dots, B_p)$, где $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$, - операторы обобщенного дифференцирования по комплексной переменной z_j. Задача некорректна за Адамаром, а ее решения связано с проблемой малых знаменателей. Доказано метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи, а также установлены условия существования и единственности данного решения в шкале пространств функций многих комплексных переменных.

Ключевые слова и фразы: уравнение в частных производных, оператор обобщенного дифференцирования, псевдо-дифференциальный оператор, малые знаменатели, метрическая оценка.