ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 104–112 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.104–112
doi:10.15330/cmp.6.1.104-112

Лучко В.М.

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ p-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Розглянуто задачу Коші для параболічного рівняння з імпульсним впливом, побудовано її розв'язок та вивчено властивості розв'язку над полем $\mathbb{Q}_p$.

Ключові слова і фрази: задача Коші, матрицант, імпульсна дія.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine
E-mail: vmluchko@gmail.com

Вступ

У 90-х роках минулого століття у математичній фізиці зріс інтерес до p-адичних чисел. У теорії суперструн (М. Гріна, Дж. Шварца і Е. Віттена [3] та І.В. Воловіча, І.Я. Арефʼєвої [1]), яка апелює до фантастично малих відстаней, порядку 10^{-33} см, немає причин вважати, що звичайні представлення про простір-час там можуть бути застосовані.

Однією з альтернативних можливостей для описання структури простору-часу є використання поля $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел замість множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел. На можливість використання p-адичних чисел у математичній фізиці було вперше вказано у 1984 р. у роботі [7] Владімірова В.С. і Воловіча І.В.

У праці [6] побудована теорія узагальнених функцій над простором функцій з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{C}$, яка застосовується до тих задач, що виникають у математичній фізиці. Теорія у багато чому аналогічна відповідній теорії над множиною $\mathbb{R}$, але є певні суттєві відмінності. Основну увагу приділяється теорії згортки, перетворенню Фурʼє, аналогу оператора Рімана-Ліувіля, обчисленню інтегралів.

Параболічні рівняння над полем p-адичних чисел вивчалися у праці А.Н. Кочубея [4], в якій при певних припущеннях відносно коефіцієнтів, побудовано і досліджено фундаментальний розвʼязок задачі Коші, доведені існування та єдиність розвʼязку у класах зростаючих функцій, знайдені умови невідʼємності фундаментального розвʼязку.

На даний момент опубліковано чимало праць, присвячених дослідженню задач з імпульсною дією для різних класів диференціальних рівнянь. Найбільш повні та глибокі дослідження таких задач вивчені А.М. Самойленком та О.М. Перестюком. В їх монографії [5] досліджуються основні питання теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Наведена загальна характеристика систем таких рівнянь, вказано подібність та відмінність задач даної теорії із задачами звичайних диференціальних рівнянь. Основну увагу в роботі приділяється дослідженню періодичних та майже періодичних розвʼязків систем з імпульсною дією, інтегральних множин рівнянь, що розглядаються, питанню стійкості розвʼязку, імпульсному керуванню процесами.

УДК 517.95+512.625
2010 *Mathematics Subject Classification:* 39K99.

1 Основні поняття p-адичного аналізу

Наведемо деякі твердження p-адичного аналізу, які будуть використовуватися в подальшому. Детальне їх викладення міститься у [2, 6].

Нехай p — просте число, яке надалі буде фіксованим. Введемо на множині $\mathbb{Q}$ норму $|x|_p$ за правилом $|0|_p = 0$, $|x|_p = p^{-\gamma}$, якщо раціональне число x подане у вигляді

$$x = p^{\gamma}\frac{m}{n},$$

де $\{m, n, \gamma\} \subset \mathbb{Z}$, m, n не діляться на p. Доповнення $\mathbb{Q}$ за p-адичною нормою утворює поле $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел.

Норма $|\cdot|_p$ володіє наступними властивостями: $|x|_p = 0$ у тому випадку, коли $x = 0$; $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$; $|x+y|_p \le \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$, причому якщо $|x|_p \ne |y|_p$, то $|x+y|_p = \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$. Таким чином p-адична норма неархімедова.

Метрика $\rho(x, y) = |x-y|_p$ перетворює поле $\mathbb{Q}_p$ у повний сепарабельний цілком незв'язний локально компактний метричний простір. На $\mathbb{Q}_p$ існує (єдина, з точністю до множника) міра dx, інваріантна відносно додавання. При цьому, якщо $a \in \mathbb{Q}_p$, $a \ne 0$, то $d(xa) = |a|_p dx$. Будемо нормувати міру так, що

$$\int\limits_{|x|_p \le 1} dx = 1.$$

Простір $\mathbb{Q}_p$ є об'єднанням зліченної сім'ї попарно неперетинних множин

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^{\nu}\},$$

при цьому

$$\int\limits_{|x|_p = p^{\nu}} dx = p^{\nu}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Введемо у розгляд клас $\mathfrak{M}_\gamma (\gamma \ge 0)$ комплекснозначних функцій $\varphi(x)$ на $\mathbb{Q}_p$, які задовольняють умови:

1) $|\varphi(x)| \le c\left(1 + |x|_p\right)^{\gamma}$, де c — довільна додатна константа;

2) існує таке натуральне число $N = N(\varphi)$, що для довільного $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \quad |x'| \le p^{-N}.$$

Функція φ, що задовольняє умови 1), 2), називається локально сталою, а число N — показником локальної сталості функції φ. Якщо функція φ залежить також від параметра t, то будемо говорити, що $\varphi \in \mathfrak{M}_\gamma$ рівномірно по t, якщо константа c і показник N не залежить від t.

Функція $f(x)$ називається *локально-інтегрована* на $\mathbb{Q}_p$, $f \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$, якщо для довільного $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\int\limits_{|x|_p \le p^N} |f(x)| dx < \infty.$$

Множину фінітних функцій з $\mathfrak{M}_0$ будемо позначати $\mathfrak{D}$. Нехай χ — нормований адитивний характер поля $\mathbb{Q}_p$, тоді $\chi \in \mathfrak{M}_0$. Перетворення Фур'є функцій $\varphi \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ визначається формулою

$$F(\varphi) \equiv \widetilde{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x)\varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Обернене перетворення:

$$F^{-1}(\varphi) \equiv \varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\xi x)\widetilde{\varphi}(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

якщо $\widetilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$.

Має місце формула [1]

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\chi(\xi x)dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(p^{-\nu}|\xi|_p^{-1}\right) p^{-\nu} - |\xi|_p^{-1} f\left(p|\xi|_p^{-1}\right), \tag{1}$$

де $\xi \neq 0$ і припускається збіжність ряду $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu})p^{-\nu}$.

Оператор D^γ диференціювання порядку $\gamma > 0$ визначений на функціях $\varphi \in \mathfrak{D}$ формулою [6]

$$\begin{aligned}(D^\gamma\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)}\Bigg\{ &\int\limits_{|y|_p\leq 1} |y|_p^{-\gamma-1}[\varphi(x-y) - \varphi(x)]dy \\ &+ \int\limits_{|y|_p>1} |y|_p^{-\gamma-1}\varphi(x-y)dy + \frac{1-p^{-1}}{1-p^\gamma}\varphi(x)\Bigg\},\end{aligned} \tag{2}$$

де $\Gamma_p(s) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}}$ — p-адичний аналог гама-функції.

У другому інтегралі правої частини (2) додамо і віднімемо $|y|_p^{-\gamma-1}\varphi(x)$ та скористаємося тим, що

$$\int\limits_{|y|_p>1} |y|_p^{-\gamma-1}dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int\limits_{|y|_p=p^\nu} |y|_p^{-\gamma-1}dy = \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu\gamma} = \frac{p-1}{p(p^\gamma-1)}.$$

Тому

$$(D^\gamma\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \times \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\gamma-1}[\varphi(x-y) - \varphi(x)]dy.$$

Таким чином, оператор D^γ визначений на всіх функціях $\varphi \in \mathfrak{M}_\beta$, $0 \leq \beta < \gamma$. Якщо $\varphi \in \mathfrak{D}$, то перетворення Фур'є функції $D^\gamma\varphi$ дорівнює $|\xi|^\gamma\widetilde{\varphi}(\xi)$ у сенсі узагальнених функцій.

2 Основний результат

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a\left(D^\alpha u\right)(t,x) = f(t,x), \quad x \in \mathbb{Q}_p, t \in (\tau_0, T], \tag{3}$$

розв'язок якого будемо шукати при $t \neq \tau_j$ такий, що задовольняє умови

$$u(t,x)|_{t=\tau_0} = \varphi(x), \tag{4}$$

$$u(\tau_j+0,x) - u(\tau_j-0,x) = B_j u(\tau_j-0,x) + a_j(x), \quad j=\overline{1,s}, \tag{5}$$

де $\{\varphi, a_j, f\} \subset \mathfrak{M}_0$, B_j — сталі, $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s < T$, s скінченне, a>0, $\alpha \geq 1$; під $u(\tau_j \pm 0, x)$ будемо розуміти $u(\tau_j \pm 0, x) = \lim\limits_{t\to\tau_j\pm 0} u(t,x)$.

Як і в евклідовому випадку, перший крок полягає у побудові матриціанта задачі (3)–(5). Її розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = F^{-1}(V(t,\sigma)),$$

де $V(t,\sigma)$ є розв'язком задачі Коші з імпульсним впливом для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dV(t,\sigma)}{dt} + a|\sigma|_p^\alpha V(t,\sigma) = \widetilde{f}(t,\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{Q}_p, \tag{6}$$

$$V(t,\sigma)|_{t=\tau_0} = \widetilde{\varphi}(\sigma), \tag{7}$$

$$V(\tau_j+0,\sigma) - V(\tau_j-0,\sigma) = B_j V(\tau_j-0,\sigma) + \widetilde{a}_j(\sigma). \tag{8}$$

Покладемо $K(t,\tau,\sigma) = \exp\{-a|\sigma|_p^\alpha|(t-\tau)\}$. Побудуємо розв'язок задачі (6)–(8). Для цього спочатку розглянемо проміжок $t \in (\tau_0,\tau_1]$. Розв'язок рівняння (6) на даному проміжку визначається формулою

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_0,\sigma)c + \int\limits_{\tau_0}^{t} K(t-\tau,\tau_0,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau.$$

Згідно з початковою умовою (7) отримаємо

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_0,\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma) + \int\limits_{\tau_0}^{t} K(t-\tau,\tau_0,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau. \tag{9}$$

На проміжку $t \in (\tau_1,\tau_2]$ розв'язок рівняння (6) запишеться

$$V(t,\sigma) = K(t,\tau_1,\sigma)c + \int\limits_{\tau_1}^{t} K(t-\tau,\tau_1,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau.$$

Задовольняючи імпульсну умову (8), із врахуванням (9) будемо мати

$$c = (1+B_1)\left(K(\tau_1,\tau_0,\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} K(\tau_1-\tau,\tau_0,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau\right) + \widetilde{a}_1(\sigma),$$

тоді

$$\begin{aligned} V(t,\sigma) = {} & K(t,\tau_1,\sigma)(1+B_1)K(\tau_1,\tau_0,\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma) \\ & + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} K(t,\tau_1,\sigma)(1+B_1)K(\tau_1-\tau,\tau_0,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau \\ & + \int\limits_{\tau_1}^{t} K(t-\tau,\tau_1,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau + K(t,\tau_1,\sigma)\widetilde{a}_1(\sigma). \end{aligned}$$

Продовжуючи подібні міркування, отримаємо, що розв'язок задачі Коші на проміжку $t \in (\tau_{s-1}, \tau_s]$ однозначно визначається формулою

$$\begin{aligned} V(t,\sigma) = \mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)\widetilde{\varphi}(\sigma) + \sum_{j=1}^{s} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \mathcal{M}_1(t,\tau,\tau_j,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau \\ + \int_{\tau_s}^{t} K(t-\tau,\tau_s,\sigma)\widetilde{f}(\tau,\sigma)d\tau + \sum_{j=1}^{s} \mathcal{M}_2(t,\tau_j,\sigma)\widetilde{a}(\sigma), \end{aligned} \tag{10}$$

де використано такі позначення:

$$\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma) = K(t,\tau_s,\sigma)\prod_{k=s}^{1}(1+B_k)K(\tau_k,\tau_{k-1},\sigma),$$

$$\mathcal{M}_1(t,\tau,\tau_j,\sigma) = K(t,\tau_s,\sigma)\prod_{k=s}^{j+1}(1+B_k)K(\tau_k,\tau_{k-1},\sigma)(1+B_j)K(\tau_j-\tau,\tau_{j-1},\sigma),$$

$$\mathcal{M}_2(t,\tau_j,\sigma) = K(t,\tau_s,\sigma)\prod_{k=s}^{j+1}(1+B_k)K(\tau_k,\tau_{k-1},\sigma).$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до (10), отримаємо зображення розв'язку задачі (3)–(5):

$$\begin{aligned} u(t,x) = \int_{\mathbb{Q}_p} G_0(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^{s} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G_1(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi \\ + \int_{\tau_s}^{t} d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi + \sum_{j=1}^{s} \int_{\mathbb{Q}_p} G_2(t,x-\xi)a_j(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$G(t,\tau,x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma)K(t-\tau,\tau_s,\sigma)d\sigma, \qquad G_0(t,x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma)\mathcal{M}(t,\tau_0,\sigma)d\sigma,$$

$$G_1(t,\tau,x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma)\mathcal{M}_1(t,\tau,\tau_j,\sigma)d\sigma, \qquad G_2(t,x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma)\mathcal{M}_2(t,\tau_j,\sigma)d\sigma.$$

Лема 1. *Має місце нерівність*

$$|G(t,\tau,x)| \le c(t-\tau)\left((t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p\right)^{-\alpha-1}. \tag{12}$$

Доведення. Із зображення функції $K(t,\tau,\sigma)$ видно, що функція $G(t,\tau,x)$ неперервна по $x \in \mathbb{Q}_p$. Оцінимо її. Враховуючи представлення функції $G(t,\tau,x)$, отримаємо

$$|G(t,\tau,x)| \le \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\sigma|_p^{\alpha}(t-\tau)\}d\sigma.$$

Нехай ціле число k таке, що $p^{k-1} \leq (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} \leq p^k$. Виберемо $\eta \in \mathbb{Q}_p$, щоб $|\eta|_p = p^{k-1}$. Тоді

$$\begin{aligned} |G(t,\tau,x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-ap^{\alpha(k-1)}|\sigma|_p^{\alpha}\}d\sigma = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\eta\sigma|_p^{\alpha}\}d\sigma \\ &= |\eta|_p^{-1} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\rho|_p^{\alpha}\}d\rho = p^{-k}p \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\rho|_p^{\alpha}\}d\rho \leq C(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Використовуючи формулу (1) при $x \neq 0$, отримаємо

$$G(t,\tau,x) = \left(1-\frac{1}{p}\right)|x|_p^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu}\exp\{-a(t-\tau)p^{-\alpha\nu}|x|_p^{-\alpha}\} - |x|_p^{-1}\exp\{-a(t-\tau)p^{\alpha}|x|_p^{-\alpha}\}.$$

Розклавши експоненти у ряд, змінивши порядок сумування і просумувавши геометричну прогресію, отримаємо, що для $x \neq 0$

$$G(t,\tau,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\frac{1-p^{\alpha m}}{1-p^{-\alpha m-1}}\left(a(t-\tau)\right)^m |x|_p^{-\alpha m-1}. \tag{14}$$

Із (14) отримуємо, що для $0 < t < T$, $|x|_p \geq (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned} |G(t,\tau,x)| &\leq |x|_p^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^m}{m!}\left((t-\tau)|x|_p^{-\alpha}\right)^m \leq |x|_p^{-1}\left[\frac{c}{1!}(t-\tau)|x|_p^{-\alpha}+\ldots\right.\\ &\left.+\frac{c^m}{m!}(t-\tau)^m|x|_p^{-m\alpha}+\ldots\right] = |x|_p^{-\alpha-1}(t-\tau)\left[\frac{c}{1!}+\ldots+\frac{c^m}{m!}(t-\tau)^{m-1}|x|_p^{-m\alpha-1}+\ldots\right] \\ &\leq |x|_p^{-\alpha-1}(t-\tau)\left[\frac{c}{1!}+\ldots+\frac{c^m}{m!}(t-\tau)^{m-1}\ \frac{1}{(t-\tau)^{m-1}}+\ldots\right] \leq c_1|x|_p^{-\alpha-1}(t-\tau). \end{aligned} \tag{15}$$

Із нерівностей (13) та (15) отримуємо (12). Дійсно, якщо $|x|_p \geq (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$, то $|x|_p^{-\alpha-1} \leq c\left(|x|_p+(t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha-1}$. Якщо ж $|x|_p < (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}$, то $\left(|x|_p+(t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha-1} \geq c(t-\tau)^{-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}}$. Лема доведена. □

Нерівність (12) показує, що по змінній x функція $G(t,\tau,x)$ належить $L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$. Із зображення функції $K(t,\tau,\sigma)$ легко побачити, що функцію $G(t,\tau,x)$ можна диференціювати під знаком інтегралу. Розглянемо похідну $\frac{\partial G}{\partial t}$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -a\int\limits_{\mathbb{Q}_p}|\sigma|_p^{\alpha}e^{-a|\sigma|_p^{\alpha}(t-\tau)}d\sigma.$$

Лема 2. *Має місце нерівність*

$$\left|\frac{\partial G(t,\tau,x)}{\partial t}\right| \leq c\left((t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},$$

де константа не залежить від t, x.

Доведення аналогічне доведенню леми 1.

Якщо $x \neq 0$, то в силу (14) $G(t,\tau,x+\xi) = G(t,\tau,x)$, $\quad |\xi|_p < |x|_p$. Тому для $x \neq 0$ визначена за допомогою формули (2) функція

$$G_{\gamma}(t,\tau,x) = (D_x^{\gamma}G)(t,\tau,x), \quad 0 < \gamma \leq \alpha.$$

Знайдемо функцію G_γ та оцінимо її. Введемо таке позначення:

$$G^{(m)}(t,\tau,x) = \int\limits_{|\eta|_p \le p^m} \chi(-x\eta) \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta.$$

Враховуючи, що $|\chi(y)| = 1$ для $|y|_p \le 1$, бачимо, що за змінною x $G^{(m)} \in \mathfrak{M}_0$ з показником локальної сталості m. Звідси отримаємо

$$\begin{aligned}\left(D_x^\gamma G^{(m)}\right)(t,\tau,x) &= \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \int\limits_{|\xi|_p > p^{-m}} |\xi|_p^{-\gamma-1} \left[G^{(m)}(t,\tau,x-\xi) - G^{(m)}(t,\tau,x)\right] d\xi \\ &= \int\limits_{|\eta|_p \le p^m} \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta \int\limits_{|\xi|_p > p^{-m}} \frac{|\xi|_p^{-\gamma-1}}{\Gamma_p(-\gamma)} \left[\chi(-(x-\xi)\eta) - \chi(-x\eta)\right] d\xi \\ &= \int\limits_{|\eta|_p \le p^m} \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) \chi(-x\eta) d\eta \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{|\xi|_p^{-\gamma-1}}{\Gamma_p(-\gamma)} \left[\chi(\xi\eta) - 1\right] d\xi.\end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл, як функція η, є перетворення Фур'є узагальненої функції $f_{-\gamma}$ [6] — регуляризація функції $\frac{|\xi|_p^{-\gamma-1}}{\Gamma_p(-\gamma)}$. Тому він дорівнює $|\eta|_p^\gamma$, тобто

$$\left(D_x^\gamma G^{(m)}\right)(t,\tau,x) = \int\limits_{|\eta|_p \le p^m} \chi(-x\eta)|\eta|_p^\gamma \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta. \tag{16}$$

Згідно з формулою (1) функція $G^{(m)}$ фактично залежить лише від $|x|_p$. Зафіксуємо $x \ne 0$, тоді

$$\begin{aligned}\left(D_x^\gamma G^{(m)}\right)(t,\tau,x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \int\limits_{|\xi|_p \ge |x|_p} |\xi|_p^{-\gamma-1} \Big[G^{(m)}(t,\tau,x-\xi) \\ -G^{(m)}(t,\tau,x)\Big] d\xi \to \left(D_x^\gamma G\right)(t,\tau,x)\end{aligned}$$

для $m \to \infty$ за теоремою Лебега. Тоді із формули (16) отримуємо

$$\left(D_x^\gamma G\right)(t,\tau,x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\eta)|\eta|_p^\gamma \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta, \quad x \ne 0.$$

Правильна лема.

Лема 3. *Має місце нерівність*

$$\left|\left(D_x^\gamma G\right)(t,\tau,x)\right| \le c\left((t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p\right)^{-\gamma-1},$$

де c не залежить від t, x.

З формули (16) та перетворення Фур'є отримаємо

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} \left(D_x^\gamma G\right)(t,\tau,x) dx = 0.$$

Розглянемо "тепловий" потенціал

$$u(t,\tau,x)=\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{Q}_p}G(t-\theta,\tau,x-y)f(\theta,y)dy,$$

де $f\in\mathfrak{M}_\beta$, $0\le\beta<\alpha$. Згідно з міркуваннями, які наведені в [4], показано, що $u\in\mathfrak{M}_\beta$ і для неї правильна оцінка

$$|u(t,\tau,x)|\le c(1+|x|_p^{\beta}),\quad x\in\mathbb{Q}_p,$$

де c не залежить від t, τ, x.

Як і в евклідовому випадку, можна показати, що

$$\frac{\partial u(t,\tau,x)}{\partial t}=f(t,x)+\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{\partial G(t-\theta,\tau,x-y)}{\partial t}[f(\theta,y)-f(\theta,x)]dy$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}f(\theta,x)d\theta\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{\partial G(t-\theta,\tau,x-y)}{\partial t}dy.$$

Якщо $0<\gamma<\alpha$, то похідні $D^\gamma u$ беруться безпосередньо; якщо ж $\gamma=\alpha$, то

$$\left(D^\alpha u\right)(t,\tau,x)=\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{Q}_p}G^{(\alpha)}(t-\theta,\tau,x-y)[f(\theta,y)-f(\theta,x)]dy.$$

Аналогічними міркуваннями, як в лемах 1,2,3, для функцій G_0, G_1, G_2 отримуємо оцінки

$$|G_0(t,x)|\le c(t-\tau_0)\left((t-\tau_0)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},$$

$$|G_1(t,\tau,x)|\le c(t-\tau)\left((t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},\quad |G_2(t,x)|\le c(t-\tau_0)\left((t-\tau_0)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},$$

$$\left|\frac{\partial G_0(t,x)}{\partial t}\right|\le c\left((t-\tau_0)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},$$

$$\left|\frac{\partial G_1(t,\tau,x)}{\partial t}\right|\le c\left((t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},\qquad \left|\frac{\partial G_2(t,x)}{\partial t}\right|\le c\left((t-\tau_0)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\alpha-1},$$

$$\left|\left(D_x^\gamma G_0\right)(t,x)\right|\le c\left((t-\tau_0)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\gamma-1},$$

$$\left|\left(D_x^\gamma G_1\right)(t,\tau,x)\right|\le c\left((t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\gamma-1},\qquad \left|\left(D_x^\gamma G_2\right)(t,x)\right|\le c\left((t-\tau_0)^{\frac{1}{\alpha}}+|x|_p\right)^{-\gamma-1}.$$

Теорема. *Нехай* $\varphi\in\mathfrak{M}_\beta$, $\{a_j\}_{j=1}^{s}\in\mathfrak{M}_\beta$, $f\in\mathfrak{M}_\beta$, $\beta<\alpha$, $1+B_j\ne0$, $j=\overline{1,s}$. *Тоді розв'язок задачі Коші з імпульсною дією* (3)–(5) *існує та єдиний, і подається формулою* (11).

Доведення теореми аналогічне як у [4]. Позначимо

$$u_1(t,x)=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}G_0(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+\sum_{j=1}^{s}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}G_2(t,x-\xi)a_j(\xi)d\xi,$$

$$u_2(t,x) = \int_{\tau_s}^{t} d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G(t,\tau,x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \sum_{j=1}^{s} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G_1(t,\tau,x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi.$$

Для потенціалів, які входять у вирази для $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$, на основі лем 1, 2, 3 та формул диференціювання, переконуємося, що функція $u(t,x)$ належить класу $\mathfrak{M}_\beta$, задовольняє рівняння (3), початкову (4) та імпульсну (5) умови.

REFERENCES

[1] Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. *Supersymmetry: Kaluza-Klein theory, anomalies, and superstrings*. Sov. Phys. Usp. 1985, **28** (8), 694–708. doi:10.1070/PU1985v028n08ABEH003884 (translation of Uspekhi Fiz. Nauk 1985, **146** (8), 655–681. doi:10.3367/UFNr.0146.198508e.0655 (in Russian))

[2] Borevich Z.I., Shafarevich I.R. Theory of numbers. Nauka, Moskow, 1985. (in Russian)

[3] Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. Superstring Theory. CUP, Cambridge, 1987.

[4] Kochubei A.N. *Parabolic equations over the field of p-adic numbers*. Math. USSR Izvestiya 1992, **39** (3), 1263–1280. doi:10.1070/IM1992v039n03ABEH002247

[5] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 14. Singapore, 1995.

[6] Vladimirov V.S. *Generalized functions above the field of p-adic numbers*. Russian Math. Surveys 1988, **43** (5), 19–64. doi:10.1070/RM1988v043n05ABEH001924 (translation of Uspekhi Mat. Nauk 1988, **43** (5), 17–53. (in Russian))

[7] Vladimirov V.S., Volovich I.V. *Superanalysis. I. Differential calculation*. Math. USSR Izvestiya 1991, **55** (6), 312–1330.

Надійшло 09.10.2013

Luchko V.M. *The Cauchy problem for parabolic equation over the field of p-adic numbers with impulse action*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 104–112.

The Cauchy problem for a parabolic equation with the impulse action is considered. Its solution is constructed and properties of the solution are studied above the field $\mathbb{Q}_p$.

Key words and phrases: Cauchy problem, matricant, impulse action.

Лучко В.М. *Задача Коши для параболического уравнения над полем p-адических чисел с импульсным воздействием* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 104–112.

Рассмотрено задачу Коши для параболического уравнения с импульсным влиянием, построено ее решение и изучено свойства решения над полем $\mathbb{Q}_p$.

Ключевые слова и фразы: задача Коши, матрицант, импульсное воздействие.