

ФЕДИНЯК С.І.

ПРОСТІР ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Вивчається простір цілих рядів Діріхле скінченного Ф-типу з заданою топологією, відносно якої він буде простором Фреше.

Ключові слова і фрази: ціла функція, ряд Діріхле, максимум модуля, порядок, рід, простір Фреше.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: fedynyak@yahoo.com

ВСТУП

Для цілого ряду Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, покладемо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}.$$

Різні властивості просторів рядів Діріхле, що мають скінченні порядок і тип за Ріттом, розглянуто в роботах [1], [2].

Позначимо через X простір усіх цілих рядів Діріхле (1), для яких

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\sigma\varrho(\sigma)}} \leq T < \infty,$$

де $\varrho(\sigma)$ — уточнений порядок за Ріттом. Нехай для кожного ряду Діріхле $F \in X$

$$\|F\|_m = |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{\varphi(\lambda_n)}{\left((T + \frac{1}{m})\varrho e\right)^{\frac{1}{e}}} \right)^{\lambda_n},$$

де $m = 1, 2, 3, \dots$, а $\varphi(t)$ — розв'язок рівняння $t = e \cdot \varrho(\ln \varphi) \cdot \ln \varphi$.

В [2], зокрема, показано, що простір X з метрикою

$$d(F, G) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F - G\|_m}{1 + \|F - G\|_m}$$

є простором Фреше.

Подібні дослідження для випадку рядів Діріхле, що мають уточнений логарифмічний порядок і скінчений логарифмічний тип, проведено в роботі [3].

У цій статті результати із [1]–[3] узагальнено на випадок простору рядів Діріхле довільного зростання.

1 ФОРМУЛЮВАННЯ ТА ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Через Ω позначимо клас додатних двічі неперервно диференційованих необмежених на \mathbb{R} функцій Φ таких, що Φ' додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Через φ позначимо функцію, обернену до функції Φ' , а через $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ — функцію, асоційовану з функцією Φ за Ньютоном. Зауважимо, що функції $\Psi(x)$ і $\varphi(x)$ — зростаючі [4].

Позначимо через \mathfrak{F} множину цілих рядів Діріхле (1), для яких

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \leq 1 \tag{2}$$

і

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\Phi(\Psi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2})))} = 0. \tag{3}$$

Для кожної функції $F \in \mathfrak{F}$ введемо

$$\|F\|_m = |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що $\|F\|_m$ існує і є нормою на множині \mathfrak{F} для кожного $m \in \mathbb{N}$. Для цього нам потрібна буде наступна лема.

Лема 1 ([4]). *Нехай $\Phi \in \Omega$ і функція F зображена цілим рядом Діріхле (1). Для того, щоб виконувалася умова $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon} \right) \right)$ для всіх $n \geq n_0$.*

Враховуючи нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, з (2) для довільного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0$ маємо $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(\sigma)$. Отже,

$$|a_n| \leq \exp \left\{ -\lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon} \right) \right) \right\}, \quad n \geq n_0. \tag{4}$$

З (3) випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що

$$\frac{1}{m} - \varepsilon \geq \frac{2 \ln n}{\Phi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2}))} = \gamma_n, \quad n \geq n_1.$$

Тоді для всіх досить великих n

$$\begin{aligned} |a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} &\leq \exp \left\{ -\lambda_n \left\{ \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon} \right) \right) - \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon}} \left(\Psi(\varphi(t)) \right)' dt \right\} = \exp \left\{ -\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\lambda_n \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \int_{\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon}} \frac{dt}{t^2} \right\} = \exp \left\{ -\left(\frac{1}{m} - \varepsilon \right) \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \exp \left\{ - \left(\frac{1}{m} - \varepsilon \right) \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{2} \right) \right) \right\} \leq \exp \left\{ - \gamma_n \Phi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{2} \right) \right) \right\} = \frac{1}{n^2}.$$

Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ ряд $|a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\}$ збіжний. Зауважимо також, що $\|F\|_p \leq \|F\|_q$ при $p \leq q$.

Легко бачити, що $\|F\|_m$ ($m \in \mathbb{N}$) є нормою. Ця норма породжує метричну топологію на \mathfrak{F} . Покладемо

$$d(F, G) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F - G\|_m}{1 + \|F - G\|_m}.$$

Через (\mathfrak{F}, d) позначимо простір \mathfrak{F} з метрикою d .

Теорема 1. Простір (\mathfrak{F}, d) є простором Фреше.

Доведення. Нам потрібно показати, що простір (\mathfrak{F}, d) повний. Нехай послідовність рядів Діріхле $\{F_\alpha\}$ є d -фундаментальною в \mathfrak{F} , тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $k_0 = k_0(\varepsilon)$, що для всіх $\alpha, \beta \geq k_0$ виконується $d(F_\alpha, F_\beta) < \varepsilon$.

Для довільних $\theta \in (0; 1)$ і $m \in \mathbb{N}$ виберемо $\varepsilon > 0$ так, що $2^m \cdot \varepsilon < \theta < 1$. Оскільки $d(F_\alpha, F_\beta) < \varepsilon$, то

$$\|F_\alpha - F_\beta\|_m = |a_0^{(\alpha)} - a_0^{(\beta)}| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n^{(\beta)}| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} < \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (5)$$

Отже, $|a_n^{(\alpha)} - a_n^{(\beta)}| < \frac{\theta}{1 - \theta}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{a_n^{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^{\infty}$ є фундаментальною для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a_n^{(\alpha)} = a_n$.

Спрямувавши в (5) β до $+\infty$, для $\alpha \geq k_0$ отримуємо

$$|a_0^{(\alpha)} - a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} < \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

Покладемо $\alpha = k_0$, тоді

$$|a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} < |a_n^{(k_0)}| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} + \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

Ряд Діріхле $F_{k_0} = a_0^{(k_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(k_0)} e^{s\lambda_n}$ належить (\mathfrak{F}, d) і, отже, виконується (4). Тому для деякого $p > m$ і досить великих n буде виконуватись нерівність

$$|a_n^{(k_0)}| \leq \exp \left\{ - \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{p}} \right) \right) \right\}.$$

Тоді

$$|a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} < \exp \left\{ - \lambda_n \left(\Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{p}} \right) \right) - \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right) \right\} + \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

Враховуючи довільність θ і те, що перший доданок у правій частині останньої нерівності прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, отримуємо, що послідовність $\{a_n\}$ задовольняє (4). Тому, за лемою 1, для ряду Діріхле $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ виконується співвідношення

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + \varepsilon) \Phi(\sigma), \quad \sigma \geq \sigma_1.$$

Щоб показати, що $F \in \mathfrak{F}$, нам потрібна наступна лема.

Лема 2. Якщо $\Phi \in \Omega$ і виконується (3), то співвідношення

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

рівносильне співвідношенню

$$\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Доведення. За нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ з (7) випливає (6).

Доведемо, що з (6) випливає (7). З (6) для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ виконується умова $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, \infty)$, а з леми 1 випливає, що для всіх $n \geq n_0$ виконується $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right)$.

Покладемо $\gamma(\sigma) = 2\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$. Тоді для всіх $\sigma \geq \sigma_0$ виконується

$$\begin{aligned} M(\sigma, F) &\leq \left(\sum_{\lambda_n \leq \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \right) |a_n| e^{\sigma \lambda_n} \\ &\leq \mu(\sigma, F) n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \exp \left\{ -\lambda_n \left(\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right) - \sigma \right) \right\}, \end{aligned}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$.

Для всіх $\lambda_n > \gamma(\sigma)$ виконується

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\lambda_n \left(\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right) - \sigma \right) \right\} &< \exp \left\{ -\lambda_n \left(\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right) - \Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \left(\Psi(\varphi(x)) \right)' dx \right\} = \exp \left\{ -\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \frac{\Phi(\varphi(x))}{x^2} dx \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\lambda_n \Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right) \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \frac{dx}{x^2} \right\} = \exp \left\{ -(1-\varepsilon)\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right) \right\}. \end{aligned}$$

Враховуючи сказане вище, а також те, що з (3) випливає нерівність $\frac{\ln n}{\Phi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2}))} < \frac{1-\varepsilon}{2}$, отримуємо

$$M(\sigma, F) < \mu(\sigma, F) n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \frac{1}{n^2} < \mu(\sigma, F) n(\gamma(\sigma)) + \frac{1}{n(\gamma(\sigma))}.$$

Тобто,

$$\ln M(\sigma, F) < \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(\gamma(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Зіславшись знову на (3), отримуємо, що

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{\Phi(\sigma)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln n(x)}{\Phi(\Psi(\varphi(x/2)))} = 0.$$

Отже, виконується (7). Лему 2 доведено. □

Щоб довести теорему, залишилось показати, що $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} d(F_\alpha, F) = 0$. Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $M > 0$, що

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F^{(\alpha)} - F\|_m}{1 + \|F^{(\alpha)} - F\|_m} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Оскільки $F^{(\alpha)}$, $F \in \mathfrak{F}$, то існує таке $N_1 \in \mathbb{N}$, що для всіх $m \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ виконується

$$\sum_{n=N_1+1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (9)$$

Оскільки $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a_n^{(\alpha)} = a_n$, то існує таке K^* , що для всіх $\alpha > K^*$ та $m \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ буде виконуватись співвідношення

$$\sum_{n=0}^{N_1} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp \left\{ \lambda_n \Psi \left(\varphi \left(\frac{\lambda_n}{1 + \frac{1}{m}} \right) \right) \right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (10)$$

Тоді з (9) і (10) випливає, що $\|F_\alpha - F\|_m < \frac{\varepsilon}{2}$, звідки маємо, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F^{(\alpha)} - F\|_m}{1 + \|F^{(\alpha)} - F\|_m} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому, зважаючи на (8), отримуємо, що $d(F_\alpha, F) < \varepsilon$. Отже, простір (\mathfrak{F}, d) є повним. Теорему доведено. \square

REFERENCES

- [1] Kamthan P.K. *FK-Space for entire Dirichlet functions*. Collec. Math. 1969, **20** (3), 272–280.
- [2] Kamthan P.K., Hussain T. *Spaces of entire functions represented by Dirichlet series*. Collec. Math. 1968, **19** (3), 203–216.
- [3] Kumar A., Srivastava G.S. *Spaces of entire functions of slow growth represented by Dirichlet series*. Portugal. Math. 1994, **51** (1), 3–11.
- [4] Sheremeta M.M. *Derivative of an entire function*. Ukrainian Math. J. 1988, **40** (2), 188–192.

Надійшло 01.06.2013

Fedynyak S.I. *Space of entire Dirichlet series*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 336–340.

We consider the space of entire Dirichlet series of finite Φ -type, endowed with a certain topology under which it is a Frechet space.

Key words and phrases: entire function, Dirichlet series, maximum modulus, order, genus, Frechet space.

Федьняк С.І. *Пространство целых рядов Дирихле* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 336–340.

Изучается пространство целых рядов Дирихле конечного Φ -типа, наделенное некоторой топологией, относительно которой оно будет пространством Фреше.

Ключевые слова и фразы: целая функция, ряд Дирихле, максимум модуля, порядок, род, пространство Фреше.