

ОВЧАР І.Є.¹, СКАСКІВ О.Б.²ОДИН АНАЛОГ НЕРІВНОСТІ ВІМАНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА,
ЗАЛЕЖНИХ ВІД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Встановлюються асимптотичні оцінки зверху інтегралів типу Лапласа.

Ключові слова і фрази: нерівність Вімана, інтеграл Лапласа-Стілт'єса, ряд Діріхле.¹ Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 15 Karpatska str., 76019, Ivano-Frankivsk, Ukraine² Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine

Нехай $f(u)$ — довільна невід'ємна вимірна функція на $\mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, а ν — така зліченно-адитивна на \mathbb{R}_+ міра з необмеженим носієм, що $\nu(\{x: 0 \leq x \leq b\}) < +\infty$ для кожного $b > 0$. При цьому через $\nu(E)$ позначаємо ν -міру ν -вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_+$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+ \cap E} \nu(dx)$, а $\nu(a, b] := \nu(\{u \in \mathbb{R}_+ : a < u \leq b\})$. Розглянемо функції $F(x)$, визначені на $\mathbb{R}_- := (-\infty; 0)$ за допомогою збіжного для всіх $x \in \mathbb{R}_-$ інтегралу

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du). \quad (1)$$

Через $\mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо клас функцій F вигляду (1).

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ ($0 \leq t \rightarrow +\infty$); L_1 — клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$.

Для вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_-$ її логарифмічною мірою називаємо величину

$$m_{\ln}(E) := \int_{E \cap [-1, 0)} \frac{dx}{|x|}.$$

Нехай $\text{supp } \nu$ — носій міри ν в \mathbb{R}_+ , тобто така замкнена множина $E \equiv \text{supp } \nu$, що $\nu(\mathbb{R}_+ \setminus E) = 0$ і $\nu(\{u \in \mathbb{R}_+ : |u - u_0| < r\}) > 0$ для кожних $u_0 \in E$ і $r > 0$.

Для $x < 0$ та $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{f(u)e^{xu} : u \in \text{supp } \nu\}.$$

У статті [3] знайдено достатні умови, за яких виконується співвідношення

$$F(x) \leq (d + o(1))\mu_*(x)$$

при $x \rightarrow -0$ зовні деякої виняткової множини нульової асимптотичної h -щільності у точці $x = 0$ [3]. При цьому множина $E \subset \mathbb{R}_-$, яка має скінченну логарифмічну міру, має також нульову асимптотичну h -щільність у точці $x = 0$ для $h(x) \equiv x$, тобто $\int_{E \cap [x, 0)} dx = o(|x|)$ ($x \rightarrow -0$). Метод доведення згаданого щойно твердження є близьким

до методу доведень з [5, 6], який по суті експлуатує ту ж ідею використання ймовірнісної нерівності Б'єнеме-Чебишова, що й у П. Розенблума [4]. Власне, доведення базується на використанні такої нерівності [3, нерівність (2)]:

$$F(x) \leq \frac{c}{c-1} \int_{|x-g'(x)| < \sqrt{cg''(x)}} e^{xu} f(u) v(du), \quad (2)$$

яка виконується для всіх $x < 0$ і для будь-якої функції $c = c(x) > 1$, де $g(x) = \ln F(x)$.

З нерівності (2) нескладно отримати таке твердження.

Твердження 1. Нехай $F \in \mathcal{I}_0(v)$ і виконується умова

$$(\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\forall a > 0)(\forall b \in (0, a)): \quad v(a-b, a+b] \leq c_1 b + c_2. \quad (3)$$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує така множина $E \subset (-\infty; 0)$ скінченної логарифмічної міри, тобто $m_{\ln}(E) < +\infty$, що для всіх $x \in [-1, 0) \setminus E$ виконується нерівність

$$F(x) \leq \frac{\mu_*(x)}{|x|^{1+\varepsilon}} \left(\ln \left(\frac{\mu_*(x)}{|x|} \right) \right)^{1/2+\varepsilon}. \quad (4)$$

Доведення. З нерівності (2) за умовою (3) отримуємо

$$F(x) \leq \frac{c}{c-1} \mu_*(x) (c_1 \sqrt{cg''(x)} + c_2). \quad (5)$$

Для функцій $\psi \in L_1$, $h \in \{g(x), g'(x)\}$ означимо множину $E(h) := \{x < 0: h'(x) \geq \psi(h(x))/|x|\}$. Тоді

$$m_{\ln}(E(h)) = \int_{E(h)} \frac{dx}{|x|} \leq \int_{E(h)} \frac{h'(x) dx}{\psi(h(x))} \leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty.$$

Отже, $m_{\ln}(E(g) \cup E(g')) < +\infty$ і для всіх $x \in [-1, 0)$ зовні множини скінченної логарифмічної міри $g''(x) \leq \frac{1}{|x|} \psi(\frac{1}{|x|} \psi(g(x)))$. Вибираючи $\psi(t) = t^{1+\delta}$, $c(x) \equiv 2$, а $\delta > 0$ достатньо малим, з (5) отримуємо, що при $x \rightarrow -0$ ($x \notin E(g) \cup E(g')$)

$$F(x) \leq \frac{\mu_*(x)}{|x|^{1/2+\varepsilon/2}} (g(x)/|x|)^{1/2+\varepsilon/2},$$

звідки вже елементарно отримуємо потрібне співвідношення. \square

На те, що показники степенів $1 + \varepsilon$ і $1/2 + \varepsilon$ в нерівності (4) одночасно не можна, взагалі кажучи, замінити на числа менші, ніж 1 і 1/2, вказує таке твердження.

Твердження 2. Для кожної міри ν такої, що $(\forall x \in \mathbb{R}_-): \int_{\mathbb{R}_+} \exp\{ux\} \nu(du) < +\infty$ і виконується умова

$$(\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\forall a > 0)(\forall b \in (0, a)): \quad \nu(a-b, a+b] \geq c_1 b + c_2, \quad (6)$$

існує функція $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$, для якої

$$\lim_{x \rightarrow -0} F(x) \left(\frac{\mu_*(x)}{|x|} \left(\ln \left(\frac{\mu_*(x)}{|x|} \right) \right)^{1/2} \right)^{-1} > 0. \quad (7)$$

Зауваження 1. Умови (3) і (6) виконуються у випадку, коли ν — міра Лебега на прямій. Про умову (3) те ж саме можна сказати і у випадку, коли міра ν має вигляд $\nu(0, t] = \int_{(0,t]} du/l(u)$, де $l \in L$.

Доведення. Розглянемо інтеграл вигляду (1) з $f(u) = \exp\{u^\varepsilon\}$ ($u \geq 0$), тобто

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{h(u,x)} \nu(du),$$

де $h(u, x) = u^\varepsilon + xu$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Зрозуміло, що $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$. Справді, при фіксованому $x < 0$ для всіх достатньо великих $u \geq u_0$ маємо $u^\varepsilon \leq u|x|/2$, тому за умовою

$$F(x) \leq \int_0^{u_0} e^{h(u,x)} \nu(du) + \int_{\mathbb{R}_+} e^{xu/2} \nu(du) < +\infty.$$

Крім цього, очевидно, що $\min\{F(x), \mu_*(x)\} \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$).

Зауважимо тепер, що для кожного $x < 0$ точку $u(x)$ максимуму підінтегральної функції знаходять з рівняння $h'_u(u, x) = \varepsilon \cdot u^{\varepsilon-1} - |x| = 0$ і, отже,

$$u(x) = (\varepsilon/|x|)^{1/(1-\varepsilon)}, \quad \ln \mu_*(x) = h(u(x), x) = (1-\varepsilon)(u(x))^\varepsilon = (1-\varepsilon)(\varepsilon/|x|)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}. \quad (8)$$

Оскільки $h''_u(u, x) = \varepsilon(\varepsilon-1) \cdot u^{\varepsilon-2}$, то за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа

$$h(u, x) = h(u(x), x) - \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2} \frac{(u-u(x))^2}{(u(x) + \theta(u-u(x)))^{2-\varepsilon}}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Тому, якщо вибрати $v = v(x) = (u(x))^{1-\varepsilon/2}$ ($x < 0$), то $v(x) = o(u(x))$ ($x \rightarrow -0$) і, отже, з умови (6) при $x \rightarrow -0$ отримуємо

$$\begin{aligned} F(x) &\geq \mu_*(x) \int_{(u(x)-v, u(x)+v]} \exp\left\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2} \frac{(u-u(x))^2}{(u(x) + \theta(u-u(x)))^{2-\varepsilon}}\right\} \nu(du) \\ &\geq \mu_*(x) \nu(u(x) - v(x), u(x) + v(x)) \exp\left\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(1+o(1))}{2}\right\} \\ &\geq c_3 \mu_*(x) (c_1 v(x) + c_2) \quad (x \rightarrow -0), \end{aligned} \quad (9)$$

де $c_3 = \exp\{-\varepsilon(1-\varepsilon)/3\}$. З рівностей (8) випливає, що

$$v(x) = (\varepsilon/|x|)^{(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)} = \varepsilon^{(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)} \frac{1}{|x|} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{\varepsilon/(2(1-\varepsilon))} = \frac{C_\varepsilon}{|x|} (\ln \mu_*(x))^{1/2}$$

позаяк $(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon) - 1 = \varepsilon/(2(1-\varepsilon))$, де $C_\varepsilon = \varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon}$. Залишається зауважити, що

$$\ln \mu_*(x) = (1+o(1)) \ln(\mu_*(x)/|x|) \quad (x \rightarrow -0),$$

тому з (9) остаточно отримуємо, що

$$\lim_{x \rightarrow -0} F(x) \left(\frac{\mu_*(x)}{|x|} \left(\ln \left(\frac{\mu_*(x)}{|x|} \right) \right)^{1/2} \right)^{-1} \geq C_\varepsilon c_1 c_3 > 0.$$

□

Зауваження 2. Нескладно помітити, що якщо міра ν задовольняє умову ($\exists \varepsilon \in (0, 1)$): $\lim_{t \rightarrow +\infty} \nu(t - t^{1-\varepsilon/2}, t + t^{1-\varepsilon/2})/t = +\infty$, то для функції F з доведення Твердження 1 нижня границя в (7) дорівнює $+\infty$.

З твердження 1 отримуємо наслідок для абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 := \{z: \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{z\lambda_n}, \quad (10)$$

де (λ_n) — така послідовність, що $0 = \lambda_0 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \rightarrow +\infty$ ($1 \leq n \rightarrow +\infty$). Для цього досить, як і в [3], вибрати таку міру ν , що $\nu(E) = \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E)$, для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$, де δ_λ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці λ , і застосувати Твердження 1 до ряду Діріхле

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{\sigma\lambda_n} = \int_0^{+\infty} f(x) e^{x\sigma} d\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} I(\sigma),$$

де f — невід'ємна функція така, що $f(\lambda_n) = |F_n|$ і $f(x) = 0$ для всіх $x \notin \{\lambda_n: n \geq 0\}$.

Тоді $\mu_*(\sigma, I) = \mu(\sigma, F) \stackrel{\text{def}}{=} \{|F_n| e^{\sigma\lambda_n}: n \geq 0\}$. Звідси негайно за допомогою нерівностей $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F)$ отримуємо, що

$$M(x, F) \leq \frac{\mu(x, F)}{|x|^{1+\varepsilon}} \left(\ln \left(\frac{\mu(x, F)}{|x|} \right) \right)^{1/2+\varepsilon} \quad (11)$$

при $x \rightarrow -0$ ($x \notin E$, $m_{\ln}(E) < +\infty$), за умов Твердження 1. Залишається зауважити, що умови Твердження 1 для функції $I(x)$ виконуються як тільки

$$(\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\forall a > 0)(\forall b \in (0, a)): \quad n(a+b) - n(a) \leq c_1 b + c_2, \quad (12)$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_n) . Отже, отримали такий наслідок.

Наслідок. Нехай для абсолютно збіжного у півплощині Π_0 ряду Діріхле вигляду (10) виконується умова (12). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність (11) виконується при $x \rightarrow -0$ ($x \notin E$, $m_{\ln}(E) < +\infty$).

Якщо цей наслідок застосувати до функції $F(s) = f(e^s)$, де $f(z)$ — аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функція, задана степеневим рядом вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ з радіусом збіжності $R(f) = 1$, то отримуємо таке твердження (див., наприклад, [1, 7]): для кожного $\varepsilon > 0$ існує така множина $E \subset (0, 1)$ скінченної логарифмічної міри, тобто $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$, що для всіх $r \in (0, 1) \setminus E$ виконується такий аналог класичної нерівності Вімана:

$$M_f(r) \leq \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\varepsilon}} \ln^{1/2+\varepsilon} \frac{\mu_f(r)}{1-r},$$

де $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n: n \geq 0\}$.

Варто також зауважити, що для абсолютно збіжних у півплощині Π_0 рядів вигляду (10), невід'ємна послідовність показників яких задовольняє лише умову

$$\sup\{\lambda_n: n \geq 0\} = +\infty$$

(тобто, зокрема, може мати будь-яку кількість скінченних точок скупчення), у статті [2] знайдено умови на послідовність $(|F_n|)$, за яких нерівність вигляду

$$M(x, F) \leq \mu(x, F)(\ln \mu(x, F))^q$$

виконується для всіх $x < 0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри і є непо-
кращуваною. Повні аналоги останньої нерівності нескладно отримуються для інтегралів
вигляду (1), що є скінченними для всіх $x \in \mathbb{R}$, з тверджень, які доведено в [5, 6].

REFERENCES

- [1] Kövari T. *On the maximum modulus and maximum term of functions analytic in the unit disc*. J. London Math. Soc. 1966, **41**, 129–137. doi:10.1112/jlms/s1-41.1.129
- [2] Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents*. Mat. Stud. 2013, **40** (1), 108–112.
- [3] Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *On the estimates of the Laplace integrals on the small parameter*. Carpathian Math. Publ. 2011, **3** (1), 106–111. (in Ukrainian)
- [4] Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions*. In: Szegő G., Loewner Ch. (Eds.) *Studies Math. Anal. and Related Topics*. Calif. Univ. Press, Stanford, 1962, 325–330.
- [5] Skaskiv O.B. *On certain relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*. Math. Notes 1999, **66** (2), 223–232. doi:10.1007/BF02674881 (translation of Mat. Zametki, 1999, **66** (2), 282–292 (in Russian))
- [6] Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *Asymptotic estimations for Laplace type integrals*. Mat. Stud. 2002, **18** (2), 125–146. (in Ukrainian)
- [7] Suleimanov N.M. *Wiman-Valiron type estimates for power series with finite radius of convergence and their accuracy*. Dokl. Akad. Nauk USSR 1980, **253** (4), 822–824. (in Russian)

Надійшло 26.09.2013

Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *Some analogue of the Wiman inequality for the Laplace integrals on a small parameter*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 305–309.

Asymptotic estimates from below for the Laplace integrals are established.

Key words and phrases: Wiman's inequality, Laplace-Stieltjes integral, Dirichlet series.

Овчар И.Е., Скаскив О.Б. *Один аналог неравенства Вимана для интегралов Лапласа, зависящих от малого параметра* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 305–309.

Устанавливаются асимптотические оценки сверху интегралов типа Лапласа.

Ключевые слова и фразы: неравенство Вимана, интеграл Лапласа-Стилтьеса, ряд Дирихле.